Beiträge
zur
Gewölbtheorie.

Frei bearbeitet nach Carvallo

von

H. Tellkampf,
Ingenieur-Assistent zu Osnabrück.

Mit einem Vorworte

von

Dr. M. Rühlmann,
Professor an der polytechnischen Schule in Hannover.

Mit 2 Figurentafeln.

Hannover.
Helwing'sche Hofbuchhandlung.
1855.

Druck von Ph. C. Göhmann.

Vorwort.

Die meisten der bis jetzt bekannt gewordenen Gewölbetheorien leiden entweder an einer unrichtigen mathematischen Begründung, oder ermangeln der dem Praktiker nothwendigen Einfachheit und Kürze und somit der eigentlichen Brauchbarkeit.

Auffassungen dieses Gegenstandes, welche die letztgenannten Gesichtspunkte zu erreichen streben, sind daher als willkommen zu bezeichnen und schien mir in dieser Beziehung eine Arbeit Carvallo's in den Annales des Ponts et Chaussées (1853, Nr. 40) besonders beachtenswerth. Zwar löst dieselbe die vorliegende Frage noch nicht vollständig, bezeichnet aber hierzu einen Weg, der, weiter verfolgt, zum Ziele führen dürfte.

Diese Gründe so wie der Wunsch, für meine Vorträge über Baumechanik an der polytechnischen Schule in Hannover (neben dem bekannten Navier'schen Werke) einen Leitfaden für eine praktische Gewölbetheorie zu besitzen, welche wenigstens im Allgemeinen meinen Ansichten entspricht; veranlaßten mich, einen meiner talentvollsten und tüchtigsten ehemaligen Zuhörer, Herrn Eisenbahningenieur Tellkampf in Osnabrück, zur deutschen, jedoch ganz freien und kritischen Bearbeitung der gedachten Carvallo'schen Abhandlung aufzufordern.

Gegenwärtig freue ich mich, durch den Wunsch des Herrn Verlegers zum Schreiben dieses Vorwortes veranlaßt, eine Gelegenheit zu finden, Herrn Tellkampf meine ganz besondere Anerkennung für seine gelungene Arbeit hiermit öffentlich aussprechen zu können, dabei wünschend, daß ihm diese auch von andern unbefangenen Beurtheilern nicht versagt werden möge.

Hannover, den 16. October 1854.

Rühlmann.

Vorrede.

Auf den Wunsch des Herrn Professor Rühlmann in Hannover unternahm ich es, eine Abhandlung des französischen Ingenieurs Jules Carvallo über Gewölbtheorie, welche unter dem Namen „Etude sur la stabilité des voûtes“ in den Annales des ponts et chaussées, 1853, Band 1 erschienen ist, in die deutsche Sprache zu übertragen oder vielmehr frei zu bearbeiten. Jene Abhandlung fand von Seiten des berühmten Poncelet, der zugleich mit Lamé und Piobert von der Akademie der Wissenschaften zu Paris mit ihrer Prüfung beauftragt war, eine sehr günstige Beurtheilung. Der darüber erstattete Bericht jener drei Gelehrten ist in der interessanten kleinen Schrift „Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes“ *) von Poncelet mitgetheilt.

Die Carvallo'sche Arbeit verdient diese günstige Kritik namentlich wegen der leitenden Gedanken, welche ihr zum Grunde liegen, und sie bildet deshalb einen nicht unwichtigen Fortschritt in der allmäligen Ausbildung der Gewölbtheorie. Dagegen sind die verschiedenen Mängel und Fehler, welche ich in dieser Arbeit entdeckt zu haben glaube, auf die Entwickelung der allgemeinen Theorie von keinem Einfluß und überhaupt meistentheils nur von untergeordneter Bedeutung, so daß dieselben von einem Beurtheiler wie Poncelet, der sich nur an die Hauptsachen zu halten pflegt, leicht übersehen werden konnten.

Das Hauptverdienst der Arbeit von Carvallo besteht darin, daß die Navier'sche Hypothese über die Vertheilung des Druckes

---

*) Eine mit Zusätzen versehene freie Bearbeitung von mir findet sich im Notizblatt des hannoverschen Architecten- und Ingenieur-Vereins, Band III, Heft 3.

in den Fugen, welche bisher beim Studium der Gewölbtheorie meistens nur gelegentlich wie eine Curiosität mitgetheilt wurde, hier zuerst eine ausgedehnte Anwendung sowohl bei der Betrachtung der Gewölbe als auch der Widerlager gefunden hat, wodurch die Rechnung den Erscheinungen der Wirklichkeit jetzt bedeutend angenähert ist, während man bisher ohne Rücksicht auf die unzureichende Festigkeit des Materials fast immer anzunehmen pflegte, daß die Resultante der Pressungen in den Kanten der Scheitelfuge und Bruchfuge ihren Angriffspunkt habe. Die Navier'sche Hypothese ist sehr einfach und erscheint sehr natürlich; wenn sie öfters mit der Wirklichkeit nicht hinreichend übereinzustimmen scheint, so möchte der Grund dafür weniger in der Unrichtigkeit der Hypothese selbst, als vielmehr in äußerlichen Zufälligkeiten zu suchen sein, die man entweder gar nicht bemerkt oder doch nicht in Rechnung ziehen kann. Jedenfalls ist aber der hier gewählte Betrachtungsgang ungleich rationeller als die alte Methode, nämlich den Gewölbschub nach einer unvollkommenen Theorie zu berechnen und dann zur Sicherheit mit einem Erfahrungs-Coefficienten zu multipliciren.

Bei Ableitung der allgemeinen Gleichung für die Mittellinie des Druckes hat Carvallo nach dem Vorgange von Lamé und Clapeyron die Voraussetzung vertikaler Gewölbfugen angewandt, wodurch die Rechnung ungemein vereinfacht wird; dabei ist jedoch zu bedenken, daß die hiernach erlangten Resultate nur für flache Gewölbe als annähernd richtig anzusehen sind, aber desto unrichtiger werden, je größer die Pfeilhöhe des betrachteten Gewölbes im Verhältniß zu dessen Spannweite ist. Im Allgemeinen möchte es wohl als Regel aufzustellen sein, daß man, ohne bedeutende Fehler zu begehen, nur gedrückte und allenfalls auch noch halbkreisförmige Gewölbe nach dieser Voraussetzung untersuchen darf, aber jedenfalls kann es nicht gestattet sein, auch Spitzbögen und sogar Widerlager auf dieselbe Weise zu betrachten, wie Carvallo es thut. Aus diesem Grunde sah ich mich genöthigt, ganz neue Formeln für Bestimmung der Widerlagsstärken aufzustellen, über deren Richtigkeit und Anwendbarkeit freilich ein Urtheil mir nicht zustehen kann. Nur darauf erlaube ich mir hinzuweisen, daß ich die in Fig. 1, Tafel I gezeichnete Form des Widerlagers, welche

dem Praktiker als ziemlich abnorm erscheinen mag, gewiß selbst nicht anempfehlen möchte, indem ich es bei so hohen Widerlagern, wie sie jetzt häufig bei den Viaducten vorkommen, unter allen Umständen für das Zweckmäßigste halte, zur Ersparung von Material innerhalb der Widerlager hohle Räume, die unten und oben mit einem Gewölbe geschlossen werden, anzubringen.

Die Eintheilung und die Reihenfolge der Betrachtungen habe ich im Allgemeinen so, wie dieselbe in der Carvallo'schen Arbeit ist, unverändert beibehalten; nur im Einzelnen glaubte ich Verschiedenes ändern zu müssen, was im Nachfolgenden meistens an den betreffenden Stellen bemerkt ist. In dem von mir hinzugefügten Nachtrage habe ich ferner noch einige Abänderungen in dem Rechnungsgange vorgeschlagen, wodurch nach meiner Ansicht nicht nur die Rechnung erheblich vereinfacht, sondern auch die erlangten Resulate anwendbarer für die Praxis würden, während nach den von Carvallo gegebenen Formeln und Tabellen die Gewölbstärken in der Regel reichlich groß ausfallen, also in vielen Fällen dem Praktiker nicht genügen können.

Osnabrück, im September 1854.

H. Tellkampf.

Einleitung.

§. 1.

Schon seit langer Zeit haben sich die Mathematiker mit der Aufsuchung von Theorieen über die Stabilität der Gewölbe beschäftigt und diese schwierige Frage theils durch Rechnung, theils durch graphische Methoden zu lösen gesucht. Die Anwendung der von ihnen angegebenen Methoden ist indessen so schwierig und weitläufig, daß die Praktiker dieselben fast immer verschmähen und sich dagegen auf höchst unvollkommene empirische Formeln verlassen, worin gerade der wichtigste Punkt der Frage, nämlich der größte Druck pro Flächeneinheit, welchem das Material der Gewölbsteine ausgesetzt ist, niemals vorkommt. Es ist nun der Zweck der folgenden Abhandlung, zuerst die allgemeinen Formeln für die Stabilität eines Gewölbes zu entwickeln, dann diese Formeln auf die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Gewölbformen anzuwenden, und dafür in Tabellen alle diejenigen Elemente, deren Kenntniß zur Construction eines Gewölbes wichtig ist, anzugeben.

§. 2.

Die Aufgabe, welche man sich bei dem Projectiren eines Gewölbes zu stellen pflegt, besteht gewöhnlich im Folgenden:

Es ist gegeben:

Die Gleichung des Innenbogens eines cylindrischen Gewölbes.

Das Gewicht eines Cubikmeters von dem zu verwendenden Gewölbsteine.

Der Druck pro Quadrat-Centimeter, wodurch der Stein zerquetscht wird.

Der Coefficient der Reibung des Steines auf seinem Mörtelbett in den Fugen.

Man sucht die Gleichung des Außenbogens, womit man das Gewölbe zu construiren hat, so daß die Gewölbstärke auf das Möglichste eingeschränkt werde, und daß weder ein Gleiten der einzelnen Gewölbsteine eintreten kann, noch daß die Pressung pro Flächeneinheit neben irgend einer Kante der Fugen den 10. Theil derjenigen Pressung, welche ein Zerdrücken des Steines hervorbringen würde, überschreiten darf.

§. 3.

Die Bezeichnungen der verschiedenen Gewölbformen und der verschiedenen Theile eines Gewölbes dürfen als bekannt vorausgesetzt werden. Weil sich alle möglichen Gewölbformen auf die cylindrischen oder Tonnen-Gewölbe zurückführen lassen, so wird es genügen, die allgemeinen Bedingungen der Stabilität nur für ein Tonnengewölbe von 1 Meter Länge, oder vielmehr nur für den Querschnitt eines Tonnengewölbes aufzusuchen. Die Dichtigkeit, d. h. das Gewicht einer Cubikeinheit des Mörtels in den Fugen mag gleich derjenigen des Steinmateriales angenommen werden; der Coefficient der Reibung in den Fugen ist von der Adhäsion des Mörtels abhängig.

Wenn man eine beliebige Gewölbfuge betrachtet, so ist es klar, daß die oberhalb derselben liegenden Gewölbtheile nach verschiedenen Richtungen hin Pressungen darauf ausüben werden, deren Resultante in irgend einem Punkte **M** die Fuge treffen muß. Es heißt dann die Curve, welche man sich durch die Angriffspunkte der Resultanten der Pressungen in allen einzelnen Fugen gelegt denkt, die Mittellinie des Druckes. Wenn diese Linie an irgend einer Stelle außerhalb der Bogenfläche des Gewölbes liegt, so ist das ein Zeichen davon, daß das Gewölbe unstabil ist, nämlich durch Drehung der Gewölbtheile um ihre Kanten einstürzen wird; sie darf sich aber auch weder dem Innen- noch dem Außenbogen allzusehr nähern, weil sonst der auf die Gewölbsteine ausgeübte Druck pro Flächeneinheit an einer solchen Stelle größer als die rückwirkende Festigkeit des Steines werden und ein Zerdrücken desselben verursachen könnte.

Die in der folgenden Abhandlung enthaltenen Untersuchungen stützen sich ganz auf die Betrachtung der Mittellinie des Druckes; sie sind in 6 Kapitel eingetheilt, deren Inhalt hier in Kürze angedeutet werden mag.

Im 1. Kapitel.

Zuerst denkt man sich die Gewölbfläche durch eine Menge von vertikalen Schnitten in sehr viele gleiche Theile oder Elemente zerlegt und entwickelt die Gleichungen, welche das Gleichgewicht zwischen allen den Kräften, die auf ein solches beliebiges Element einwirken, bedingen. Daraus gehen dann die folgenden Sätze hervor:

Für einen gegebenen Innenbogen kann man eine unendlich große Anzahl von stabilen Gewölben construiren.

Die horizontale Componente der Resultante der Pressungen ist für alle Stellen des Gewölbes constant und ihr Werth liegt zwischen zwei bestimmten Grenzen.

Es wird dann die Lage der Bruchfuge bestimmt und einige interessante Eigenschaften dieser Fuge gezeigt.

Durch Integration wird die allgemeine Gleichung der Mittellinie des Druckes entwickelt; es kommen darin zwei Constanten vor, nämlich der Horizontalschub im Gewölbscheitel und die Ordinate von dessen Angriffspunkte.

Die Mittellinie des Druckes ist immer eine Curve, und zwar mindestens vom zweiten Grade, im einfachsten Fall eine Parabel.

Wenn man das Gewölbe als mit Mauerwerk horizontal abgedeckt voraussetzt und wenn man die Hypothese von der Zerlegung des Gewölbes in lauter vertikale Elemente beibehält, so wird die Mittellinie des Druckes von der Gestalt des Außenbogens unabhängig; man kann dann aber den Außenbogen so construiren, daß das Gewölbe ohne Abdeckung dieselbe Mittellinie des Druckes haben würde als mit derselben. Die Gleichung des Außenbogens ist in diesem Fall von demselben Grade wie die des Innenbogens; es besteht nämlich ein einfaches Verhältniß vom ersten Grade zwischen den zu derselben Abscisse zugehörigen Ordinaten beider Curven.

Im 2. Kapitel.

Auf Grund der, zuerst von Navier aufgestellten Hypothese über die Vertheilung des Druckes in den Fugen wird der Satz abgeleitet, daß die Mittellinie des Druckes sich weder dem Innen- noch dem Außenbogen an irgend einer Stelle bis auf $1/3$ der betreffenden Gewölbstärke nähern darf, wenn nicht die Pressung an der einen Kante einer solchen Fuge negativ werden, d. h. die Fuge daselbst ein Bestreben haben soll sich zu öffnen.

Zur Bestimmung der constanten Größen, welche in der allgemeinen Gleichung der Mittellinie des Druckes vorkommen, werden acht Gleichungen mit eben so viel Unbekannten entwickelt, und zwar einestheils für den Fall, daß man das Gewölbe aus einem Minimum an Material construiren will, d. h. daß die Mittellinie des Druckes alle Fugen genau in der Mitte schneiden soll (was aber für die Anwendung auf ein mit Uebermaurung versehenes Gewölbe von keiner Wichtigkeit ist), anderntheils für solche Gewölbformen, wie sie fast immer in der Praxis vorzukommen pflegen. Dabei sind über die Lage der Angriffspunkte von der Resultante der Pressungen in der Scheitelfuge und Bruchfuge Annahmen gemacht, welche sich auf die Resultate der Versuche von Rondelet, Prony, Gauthey, Boistard, Palembini, und Robinson, und der von Audoy, Garidel, Petit, Poncelet und Michon weiter entwickelten Coulomb'schen Gewölbetheorie stützen.

Es enthalten also die beiden ersten Kapitel eine allgemeine analytische Behandlung der Stabilität der Gewölbe und die Annahmen, welche man zu machen hat, um die allgemeinen Gleichungen auf Fälle der Praxis anwenden zu können.

Im 3. Kapitel.

Die zu einer genügenden Festigkeit erforderlichen Dimensionen eines Mittelpfeilers, worauf sich zwei symmetrische Gewölbe stützen, werden bestimmt, ebenso die Form, welche man den Außenflächen die-

ses Pfeilers unter der Bedingung, daß die Pressung pro Flächeneinheit in allen Horizontalschichten dieselbe sein solle, zu geben hat.

Um die Dimensionen der Widerlager und derjenigen Pfeiler, welche zwei Gewölbe von verschiedener Größe tragen, zu ermitteln, wird die Betrachtung der Mittellinie des Druckes wieder zu Hülfe genommen.

Im 4. Kapitel.

Die bisher entwickelten allgemeinen Gleichungen werden auf die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Gewölbformen, wobei nämlich der Innenbogen als Halbkreis, Kreissegment, Ellipse, Korbbogen oder Spitzbogen construirt ist, angewandt.

Ferner wird gezeigt, wie man diese Resultate, welche eigentlich nur für Tonnengewölbe gültig sind, auch zur Berechnung der Dimensionen von andern in der Architectur gebräuchlichen Gewölbarten benutzen kann.

Im 5. Kapitel.

Um von der Theorie zur Praxis überzugehen und um die allgemeinen Formeln mit möglichster Leichtigkeit auf Beispiele anwenden zu können, so wird gezeigt, in welcher Weise man die erforderlichen Rechnungen zu führen hat, zu deren Vereinfachung einige kleine Tabellen gegeben sind.

Da der Zweck dieses Buches ist, den Praktikern von Nutzen zu sein und ihnen, wenn nur die rückwirkende Festigkeit des Materiales bekannt ist, ein einfaches und schnelles Mittel zum Projectiren eines stabilen Gewölbes an die Hand zu geben, so sind die am Schluß dieses Buches enthaltenen Tabellen berechnet, woraus man für alle Radien von 1 bis 40 Meter und für alle Stärken des Mauerwerks über dem höchsten Punkte des Innenbogens von 1 bis 12 Meter die wichtigsten Elemente, deren Kenntniß zur Construction eines halbkreisförmigen Gewölbes nöthig ist, entnehmen kann. Es wird ferner gezeigt, wie diese Tabellen berechnet worden sind, und daß dieselben nicht allein für halbkreisförmige Gewölbe, sondern auch für alle anderen beliebigen Gewölbformen mit Leichtigkeit benutzt werden können.

Im 6. Kapitel.

Der praktische Gebrauch jener Tabellen wird durch Beispiele erläutert, indem für sieben verschiedene Brücken, welche auf der französischen Centralbahn zwischen **Châteauroux** und **la Souterraine** ausgeführt oder dafür projectirt worden sind, die Rechnung vollständig durchgeführt wird.

Die angewandten Bezeichnungen sind aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen, wobei die vertikale Mittellinie der Gewölbfläche als Ordinaten-Achse und die Horizontale, welche durch den Gewölbanfang, d. h. durch den untersten Punkt des Innenbogens geht, als Abscissen-Achse angenommen ist.

Bedeutung der Zeichen.

Im 1. Kapitel.

η, veränderliche Ordinate des Außenbogens.
Y, veränderliche Ordinate der Mittellinie des Druckes.
y, veränderliche Ordinate des Innenbogens.
ϱ, Dichtigkeit des Steines, Gewicht von einem Cubikmeter.
p, Resultante der Pressungen für eine beliebige Vertikalfuge.
P_0, Resultante der Pressungen im Gewölbscheitel, bei einem symmetrischen Gewölbe eine Horizontalkraft.
η_0, Y_0, y_0, Werthe von η, Y, y im Gewölbscheitel.
$y = \varphi\,(x)$, Gleichung des Innenbogens.
$\eta = \Psi\,(x)$, Gleichung des Außenbogens.
$Y_0 - Y = \frac{\varrho}{P_0} . F\,(x)$, Gleichung der Mittellinie des Druckes.
S, Bogenlänge dieser Curve.
H, Höhe der Horizontalen, wonach die Abdeckung des Gewölbes abgeglichen ist, über der Abscissenachse.
P'_0 Horizontalschub im Scheitel des Gewölbes ohne Abdeckung.
K, constanter Coefficient $= 1 - \left(\frac{\eta_0 - y_0}{H - y_0}\right)$.

Im 2. Kapitel.

y_m, x_m, Y_m, X_m, Coordinaten derjenigen Punkte des Innenbogens und der Mittellinie des Druckes, welche auf der zum Innenbogen normalen Bruchfuge liegen.
y'_m, Y'_m, die ersten Differential-Verhältnisse von y_m, Y_m.
P', Festigkeits-Coefficient des Steines, Grenze der permanenten Belastung, $^1/_{10}$ des Gewichtes pro Flächeneinheit, wodurch der Stein zerdrückt wird.
f, Coefficient der Reibung des Steines auf dem Stein oder auf dem Mörtelbett.
ω, Winkel, welchen die Mittellinie des Druckes mit einer beliebigen Fuge einschließt.

Im 3. Kapitel.

l, Dicke eines Mittelpfeilers an seinem oberen Ende, d. h. am Gewölbanfang.
l', Dicke desselben an seiner Basis.
H_2 Höhe desselben.
P, gesammter Vertikaldruck, welchen die Gewölbe auf den Pfeiler ausüben.
Z, Höhe einer beliebigen Horizontalschicht über der Basis.
μ, halbe Dicke des Pfeilers in dieser Schicht.
Y_q, veränderliche Ordinate der Mittellinie des Druckes in einem Widerlager.
n, Index aller Größen, welche sich auf den Gewölbanfang beziehen.

M_q, Punkt, wo die Mittellinie des Druckes die Basis des Widerlagers schneidet.

δ, Abstand dieses Punktes von der äußeren Kante der Basis.

H_3, Höhe der horizontalen Oberfläche der Gewölb-Abdeckung über der Basis des Widerlagers.

Im 4. Kapitel.

r, Radius des halbkreisförmigen Innenbogens.

α, Winkel einer zum Innenbogen normalen Fuge mit der vertikalen.

h, Höhe des Anfanges des segmentförmigen Bogens über seinem Mittelpunkte.

a, b, halbe Achsen des elliptischen Innenbogens.

a_1, Abstand der Mittellinie des Spitzbogens vom Centrum des Kreises.

Kapitel I.

§. 4.

Bei den Betrachtungen dieses ersten Kapitels, wobei es darauf ankommt, einen allgemeinen Ausdruck für die Gleichung der Mittellinie des Druckes in einem beliebigen Gewölbe zu entwickeln, denken wir uns die Gewölbfläche nicht nach der Richtung der wirklichen Fugen, welche normal auf dem Innenbogen zu stehen pflegen, sondern der Einfachheit wegen durch lauter vertikale Schnitte in Elemente zerlegt, wofür wir dann die Größe und den Angriffspunkt der Resultanten der Pressungen bestimmen. Durch diese Voraussetzung, die freilich der Natur der Gewölbe nicht ganz entspricht, wird nämlich die Rechnung ungemein erleichtert; denn es liegt nur in diesem Fall der Angriffspunkt der Resultanten der Pressungen für ein beliebiges Element genau senkrecht über oder unter dem Schwerpunkte dieses Elementes, so daß man sich das Gewicht des Elementes als ebenfalls in jenem Punkte angreifend denken darf. Daraus folgt dann, daß die Richtung der Resultante der Pressungen für jedes Element mit der Richtung der Mittellinie des Druckes an derselben Stelle zusammenfallen, d. h. eine Tangente an diese Curve sein muß.

Die nach dieser Hypothese construirten Mittellinien des Druckes weichen, auch wenn man sie auf solche Gewölbe anwendet, deren Fugen, wie gewöhnlich, normal zum Innenbogen gerichtet sind, um so weniger von der Wahrheit ab, je näher dieselben durch die Mitte jeder einzelnen Gewölbfuge hindurchgehen. Denn es wird dann in Fig. 2, Tafel I. für eine beliebige Gewölbfuge μm das Gewicht des oberen Gewölbstückes $\mu m m_0 \mu_0$ und die Lage von dessen Schwerpunkte (wodurch, wie wir später aus dem in §. 8 entwickelten Satze sehen werden, die Lage des Angriffspunktes M der Pressung in dieser

Fuge μm bedingt wird) annähernd genau dieselben sein, es mag nun diese Fuge μm als eine Senkrechte oder als eine Normale zum Innenbogen durch den ihr angehörigen Punkt M der Mittellinie des Druckes gelegt worden sein. Es kann sich aber, wie aus den Betrachtungen des §. 14 hervorgehen wird, die Mittellinie des Druckes in einem stabilen Gewölbe bei keiner Fuge um mehr als $1/_6$ der betreffenden Gewölbstärke von der Mitte der Fuge entfernen, und da die in der Praxis vorkommenden Gewölbe meistens noch einen erheblichen Ueberschuß an Stabilität zu besitzen pflegen, so erscheint die obige Hypothese als hinreichend gerechtfertigt. Ueberdies ist dieselbe nur günstig für die Stabilität des Gewölbes zu nennen, weil die danach berechneten Größen der Pressungen in den Fugen immer etwas größer als die wirklichen Pressungen ausfallen.

§. 5.

Von dem zu betrachtenden Gewölbe sei in Fig. 2, Tafel I. die Fläche $m_0\ \mu_0\ m_n\ \mu_n$ der Querschnitt, welchen wir uns durch vertikale Schnitte in Elemente von der Dicke dx zerlegt denken. Die Ordinaten des Innenbogens, der Mittellinie des Druckes und des Außenbogens, welche derselben Abscisse x entsprechen, seien durch y, Y, η bezeichnet.

Auf ein beliebiges Element $m\mu\ \mu' m'$ wirken die folgenden drei Kräfte ein:

1. Das Gewicht des Elementes: $\varrho.(\eta - y).dx$, wenn ϱ die Dichtigkeit des Steines bezeichnet.

2. Der Druck p, welcher vom oberen Gewölbtheil auf den Punkt M der Fuge μm ausgeübt wird, ist den Betrachtungen des §. 4 zufolge tangential an der Mittellinie der Druckes; wenn dS das Bogen-Element dieser Curve bezeichnet, so sind die horizontale und vertikale Componente jenes Druckes p gleich $p.\frac{dx}{dS}$ und $p.\frac{dY}{dS}$.

3. Der vom unteren Gewölbtheil auf den Punkt M' der Fuge $m'\mu'$ ausgeübte Widerstand, welcher dem von oben her auf denselben Punkt ausgeübten Drucke gleich und entgegengesetzt, und tangential an der Mittellinie des Druckes im Punkte M' ist; seine horizontale und vertikale Componente sind gleich:

$$p\cdot\frac{dx}{dS} + d\left(p\cdot\frac{dx}{dS}\right) \text{ und } p\cdot\frac{dY}{dS} + d\left(p\cdot\frac{dY}{dS}\right).$$

Wenn man aber diese beiden letzteren Kräfte, nämlich den Druck im Punkte M und den Widerstand im Punkte M', zusammenzieht, so reduciren sie sich auf ihre Differenz, deren Componenten sind:

$$d\left(p\cdot\frac{dx}{dS}\right) \text{ und } d\left(p\cdot\frac{dY}{dS}\right).$$

Wenn nun zwischen sämmtlichen Kräften, welche auf das Element $m\mu\ \mu' m'$ einwirken, Gleichgewicht stattfinden, d. h. wenn das Gewölbe an dieser Stelle stabil sein soll, so hat man die folgenden

drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht gegen fortschreitende und gegen drehende Bewegung aufzustellen:

$$(1).\ d\left(p.\frac{dx}{dS}\right)=0.$$

$$(2).\ d\left(p.\frac{dY}{dS}\right)-\varrho.(\eta-y).dx=0.$$

$$(3).\ Y.\,d\left(p\,\frac{dY}{dS}\right)-x\left[d\left(p.\frac{dY}{dS}\right)+\varrho.(\eta-y).dx\right]=0.$$

Die letztere Gleichung, worin die Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf den Coordinaten-Ursprung genommen worden sind, ist für das Gleichgewicht gegen Drehbewegung; wie man sieht, so wird ihr schon durch die beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge gethan und es bleiben daher nur diese zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten p, η und Y. Daraus folgt der Satz, daß man für einen gegebenen Innenbogen eine unendlich große Anzahl von verschiedenen stabilen Gewölben construiren kann.

§. 6.

Durch Integration der Gleichung (1) erhält man:

$$p\cdot\frac{dx}{dS}=\text{Const.}$$

Wenn das Gewölbe, wie es in der Praxis fast immer vorkommt, in Bezug auf die Ordinaten-Achse symmetrisch ist, so werden die Pressungen, welche die beiden Gewölbhälften in der Schlußfuge gegen einander ausüben, gleich und entgegengesetzt, und folglich horizontal sein. Man braucht also bei der Untersuchung eines symmetrischen Gewölbes nur immer eine Hälfte desselben zu betrachten, indem man sich die andere Hälfte durch einen entsprechenden Horizontalschub P_0, dessen Größe und Angriffspunkt in der Schlußfuge näher zu ermitteln sind, ersetzt denkt. Dann wird in der obigen Gleichung $P_0=$ Const., und folglich:

$$(4).\ p\cdot\frac{dx}{dS}=P_0.$$

Mithin ist die horizontale Componente der Pressung für alle Fugen constant und zwar gleich dem Horizontalschub im Gewölbscheitel.

Wenn das Gewölbe nicht symmetrisch ist, sondern z. B. einen ansteigenden Bogen (Strebebogen) bildet, so wird die Richtung der Pressung an keiner Stelle des Gewölbes horizontal sein. Wir werden aber in den folgenden Betrachtungen der Einfachheit wegen überall voraussetzen, daß die Pressung im Gewölbscheitel horizontal gerichtet sei.

§. 7.

Wenn man den aus Gleichung (4) gezogenen Werth von p in Gleichung (2) substituirt, so wird:

(5). $P_0 . d\left(\frac{dY}{dx}\right) - \varrho . (\eta - y) . dx = 0,$

oder durch Integration:

(6). $P_0 . \frac{dY}{dx} - \int_0^x \varrho . (\eta - y) . dx = 0.$

Das erste Glied $P_0 . \frac{dY}{dx}$ dieser Gleichung ist nach Gleichung (4) auch gleich $p . \frac{dY}{dS}$, mithin die vertikale Componente des Druckes auf den Punkt M; das zweite Glied $\int_0^x \varrho . (\eta - y) . dx$ ist das Gewicht des oberen Gewölbtheils, welche zwischen der Schlußfuge und dem betrachteten Elemente $m \mu\, \mu' m'$ liegt. Es ist also die vertikale Componente der Pressung in einer beliebigen Gewölbfuge gleich dem Gewichte des oberhalb dieser Fuge befindlichen Gewölbtheils.

§. 8.

Es möge Y_0 die Höhe des Angriffspunktes der Kraft P_0 über der Abscissenachse, d. h. die Ordinate des Anfangspunktes der Mittellinie des Druckes bezeichnen.

Wenn man die Gleichung (6) umsetzt in

$P_0 . dY = dx \int_0^x \varrho . (\eta - y) . dx$, und dann auf der einen Seite zwischen den Grenzen Y_0 und Y, auf der andern zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, so erhält man:

(7). $P_0 . (Y_0 - Y) = \int_0^x dx . \int_0^x \varrho . (\eta - y) . dx,$

oder kürzer ausgedrückt:

$$P_0 . (Y_0 - Y) = \int \int \varrho . (\eta - y) . dx^2.$$

Diese Gleichung läßt sich auch in eine etwas verschiedene Form bringen; indem man $u = x$ und $w = \int \varrho . (\eta - y) . dx$ in die bekannte allgemeine Integralformel $\int du . v = u . v - \int u . dv$ substituirt, so wird:

(8). $P_0 . (Y_0 - Y) = x . \int_0^x \varrho . (\eta - y) . dx - \int_0^x \varrho . (\eta - y) . x . dx.$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist, wie sich leicht durch eine einfache Rechnung zeigen läßt, nichts Anderes als das Moment vom Gewichte des oberen Gewölbtheils $m_0 \mu_0\, \mu m$ in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Fuge μm. Es folgt also aus Gleichung (8) der Satz, daß in Bezug auf einen beliebigen Punkt der

Mittellinie des Druckes das Moment vom Gewichte des darüber belegenen Gewölbtheils gleich dem Momente des Horizontalschubes im Gewölbscheitel sein muß.

§. 9.

Wenn das betrachtete Gewölbe stabil sein soll, so muß die Mittellinie des Druckes überall innerhalb der Gewölbfläche liegen, d. h. es muß für jede Fuge Y größer als y sein. Man darf also schreiben:

$$P_0 . (Y_0 - y) > P_0 . (Y_0 - Y), \text{ und}$$

$$P_0 . (Y_0 - \eta) < P_0 . (Y_0 - Y),$$

oder nach Gleichung (7):

$$P_0 > \frac{\int\int \varrho . (\eta - y) . dx^2}{Y_0 - y}, \text{ und}$$

$$P_0 < \frac{\int\int \varrho . (\eta - y) . dx^2}{Y_0 - \eta}.$$

Diese beiden Ungleichungen geben die Grenzen an, wozwischen der Werth des Horizontalschubes im Gewölbscheitel enthalten sein muß, wenn das Gewölbe ein stabiles sein soll. Sie wurden zuerst von Coulomb auf synthetischem Wege entwickelt und bilden die Grundlage der berühmten Coulomb'schen Gewölbtheorie. In Worten lassen sich dieselben etwa folgendermaßen ausdrücken:

Bei einem stabilen Gewölbe muß das Moment des im Gewölbscheitel angreifenden Horizontalschubes in Bezug auf jeden Punkt des Innenbogens größer und in Bezug auf jeden Punkt des Außenbogens kleiner als das Moment vom Gewichte des oberen Gewölbstückes in Bezug auf denselben Punkt sein.

Dieser Satz ist für alle Fälle gültig, welche Richtung die Fugen auch haben mögen.

§. 10.

Diejenige Gewölbfuge, wofür der Ausdruck $\frac{\int\int \varrho . (\eta - y) . dx^2}{Y_0 - y}$ seinen größten Werth annimmt, also dem Werthe von P_0 am nächsten kommt, wird die Bruchfuge genannt, weil dort die Mittellinie des Druckes sich dem Innenbogen am meisten nähert und das Gewölbe dort am meisten Gefahr läuft einzustürzen, indem der obere Gewölbtheil um die untere Kante m der Bruchfuge sich drehen und nach unten fallen, der untere Gewölbtheil aber entweder allein oder nebst dem Widerlager nach außen hin gedreht werden würde. Wenn auch der Einsturz in der bezeichneten Weise nicht wirklich eintritt, so wird doch die Bruchfuge an ihrer oberen Kante das Bestreben haben sich zu öffnen, und an ihrer unteren Kante wird die Pressung sehr stark sein, so daß der Stein dadurch leicht zerquetscht werden kann.

Um das Maximum des obigen Ausdruckes zu bestimmen, hat man bekanntlich dessen erstes Differential zu entwickeln und $= 0$ zu setzen, also:

$$d\left[\frac{\int\int \varrho\,.(\eta - y)\,.\,dx^2}{Y_0 - y}\right] = 0$$

Nach der bekannten Differentialgleichung

$$d\left(\frac{u}{w}\right) = \frac{w\,.\,du - u\,.\,dw}{w^2}$$

bekommt man nun:

$$\frac{dx\,.(Y_0 - y)\int \varrho\,.(\eta - y)\,.\,dx + dy\,.\int\int \varrho\,.(\eta - y)\,.\,dx^2}{(Y_0 - y)^2} = 0,$$

oder weiter zusammengezogen:

$$\frac{\int dx\,.\int \varrho\,(\eta - y)\,.\,dx}{Y_0 - y} = -\frac{\int \varrho\,.(\eta - y)\,dx}{\frac{dy}{dx}}.$$

Wenn man das Gewicht des oberen Gewölbtheiles $m_0\mu_0\mu m$ durch P, und den Abstand des Schwerpunktes dieses Gewölbtheiles von der vertikalen Bruchfuge durch g bezeichnet, so ist, wie bereits in §. 7 und 8 bemerkt wurde und wie sich durch eine einfache Rechnung zeigen läßt:

$$P = \int \varrho\,.(\eta - y)\,.\,dx \text{ und } P.g = \int dx\,.\int \varrho\,.(\eta - y)\,.\,dx,$$

und wenn man diese Werthe in die letzte Gleichung substituirt:

$$\frac{P.g}{Y_0 - y} = \frac{P}{\frac{dy}{dx}},$$

oder abgekürzt:

$$(9).\quad \frac{g}{Y_0 - y} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Da $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der Innenbogen im Punkte m mit der Horizontalen einschließt, da ferner g der Hebelarm des Gewichtes P, und $Y_0 - y$ der Hebelarm des Horizontalschubes P_0 in Bezug auf denselben Punkt m ist, so wird durch die Gleichung (9) der folgende, zuerst von Lamé und Clapeyron entwickelte Satz ausgedrückt:

Die Tangente an denjenigen Punkt des Innenbogens, welcher zu der als vertikal vorausgesetzten Bruchfuge gehört, ferner die Horizontale durch den Angriffspunkt des Horizontalschubes im Gewölbscheitel und die Vertikale durch den Schwerpunkt des obern Gewölbstückes schneiden einander in demselben Punkte.

Durch denselben Punkt muß außerdem noch eine Tangente, welche man sich im Punkte M der Bruchfuge an die Mittellinie des Druckes gezogen denkt, hindurchgehen, weil für den Punkt M die Richtung der Resultante der Pressungen, welche sich aus den beiden Kräften P und P_0 zusammensetzt, mit jener Tangente übereinstimmt.

Das Gewölbe hat eigentlich streng genommen noch eine zweite Bruchfuge, nämlich an derjenigen Stelle, wofür der Ausdruck $\frac{\int\int \varrho \cdot (\eta - y) \cdot dx^2}{Y_0 - y}$ in der zweiten Ungleichung des §. 9 ein Minimum wird, also dem Werthe von P_0 am nächsten kommt. Dann erleidet diese Bruchfuge an ihrer oberen Kante eine sehr starke Pressung und besitzt an ihrer unteren Kante ein Bestreben sich zu öffnen. In Bezug auf die an den Außenbogen gelegte Tangente bei dieser Bruchfuge läßt sich auf ähnliche Weise ganz derselbe Satz beweisen wie vorhin für die Tangente am Innenbogen bei der andern Bruchfuge. Es braucht übrigens in der Praxis bei sorgfältig ausgeführten Gewölben diese zweite Bruchfuge fast niemals berücksichtigt zu werden, weil nur sehr selten die Mittellinie des Druckes an irgend einem Punkte zwischen Schlußfuge und Gewölbanfang sich dem Außenbogen so weit nähert, daß man in Folge dessen ein Zerdrücken des Steines oder gar einen Einsturz des Gewölbes zu befürchten hätte. Es wird daher in den folgenden Untersuchungen nur immer von der ersteren Bruchfrage, wo sich die Mittellinie des Druckes dem Innenbogen nähert, die Rede sein *).

§. 11.

Die allgemeine Gleichung der Mittellinie des Druckes ergiebt sich aus Gleichung (7) als:

$$Y = Y_0 - \frac{\varrho}{P_0} \cdot \int\int (\eta - y) \cdot dx^2.$$

In dieser Gleichung sind zwei Unbekannte, η und Y, wovon man in der Praxis gewöhnlich die erstere als gegeben ansieht; wenn man dann den Ausdruck $\int\int (\eta - y) \cdot dx^2$ der Einfachheit wegen durch $F(x)$ bezeichnet, so bekommt man:

$$(10). \quad Y = Y_0 - \frac{\varrho}{P_0} \cdot F(x).$$

Für $x = o$, d. h. für den Anfangspunkt der Mittellinie des Druckes im Gewölbscheitel ist die Richtung dieser Curve horizontal und ihre Ordinate $Y = Y_0$; wenn man nun das erste und zweite Differential-Verhältniß von $F(x)$ durch $F'(x)$ und $F''(x)$ bezeichnet, so ist für $x = 0$:

*) Es ist auffallend, daß Carvallo diese zweite Bruchfuge gar nicht erwähnt, sondern überhaupt nur von einer Bruchfuge spricht. In Folge dessen gelangt er später bei der Betrachtung eines Spitzbogens, wo beide Bruchfugen in Frage kommen, zu ganz unrichtigen Resultaten.

$$F\ (o) = 0.$$
$$F'\ (o) = 0.$$
$$F''\ (o) = \eta_0 - y_0.$$

Da also das zweite Differential-Verhältniß von $F(x)$ für $x = 0$ einen entschiedenen Werth hat, so folgt daraus, daß die Gleichung der Mittellinie des Druckes mindestens vom zweiten Grade sein wird, wenn sie nicht transcendent ist.

Diese Gleichung nimmt ihre möglichst einfachste Form in dem Falle an, wenn $F''(x) = \eta - y$ constant, nämlich gleich $\eta_0 - y_0$ ist. Dann wird:

$$Y = Y_0 - \frac{\varrho}{P_0} \cdot (\eta_0 - y_0) \cdot \frac{x^2}{2},$$

welches offenbar die Gleichung einer Parabel ist, deren Scheitel in der Ordinatenachse OY liegt. Es bildet also die Mittellinie des Druckes eine Parabel, wenn die Gewölbstärke, in vertikaler Richtung gemessen, an allen Punkten constant ist.

§. 12.

Die meisten der in der Praxis vorkommenden Gewölbe tragen eine Abdeckung aus Mauerwerk oder Erdschüttung, deren obere Fläche horizontal abgeglichen ist.

Wenn man die Dichtigkeit dieser Abdeckung durch ϱ' und die Höhe ihrer horizontalen Oberfläche über dem Gewölbanfang oder der Abscissenachse durch H bezeichnet, so bekommt man als Gleichung für die Mittellinie des Druckes in diesem Falle:

$$(11).\ P_0 . (Y_0 - Y) = \int_0^x dx . \int_0^x [\varrho . (\eta - y) . + \varrho' . (H - \eta)] . dx.$$

Für gewöhnlich kann man aber, namentlich wenn die Abdeckung ganz aus Mauerwerk besteht, die Dichtigkeit der Abdeckung gleich derjenigen der Gewölbsteine, also $\varrho = \varrho'$ annehmen; dann reducirt sich die obere Gleichung auf:

$$(12).\ P_0 . (Y_0 - Y) = \varrho . \int\int (H - y) . dx^2.$$

Weil die Ordinate des Außenbogens η aus dieser Gleichung ganz verschwunden ist, so ist mithin bei einem horizontal abgedeckten Gewölbe die Mittellinie des Druckes von der Gestalt des Außenbogens ganz unabhängig.

§. 13.

Man kann sich die Aufgabe stellen, den Außenbogen so zu construiren, daß die Mittellinie des Druckes für das freie Gewölbe dieselbe Lage einnimmt wie für das übermauerte. Weil nämlich meistens die Lehrgerüste sogleich nach Vollendung des eigentlichen Gewölbes, bevor noch die Uebermauerung angefangen ist, weggenommen werden, damit bei dem unvermeidlichen Setzen des Gewölbes der Mörtel in den Fugen noch nicht erhärtet sei und etwas nachgeben könne,

so ist es sehr wünschenswerth, daß durch das spätere Aufbringen der Uebermauerung die Mittellinie des Druckes nicht wieder ihre Lage verändere und kein neues Setzen des Gewölbes in anderer Weise wie vorhin entstehe, wodurch bei dem schon erhärteten Mörtel leicht gefährliche Risse in den Gewölbfugen hervorgebracht werden können.

Wenn man den Horizontalschub im Scheitel des freien Gewölbes durch P'_0 bezeichnet, so wird nach Gleichung (7) die Gleichung der Mittellinie des Druckes:

$$(13).\quad P'_0 . (Y_0 - Y) = \varrho . \int\int (\eta - y) . dx^2,$$

und indem man die Werthe von $(Y_0 - Y)$ aus den beiden Gleichungen (12) und (13) zieht und einander gleichsetzt, so wird:

$$\frac{\varrho}{P'_0} . \int\int (\eta - y) . dx^2 = \frac{\varrho}{P_0} . \int\int (H - y) . dx^2,$$

oder zweimal differentiirt:

$$(14).\quad \frac{\eta - y}{P'_0} = \frac{H - y}{P_0}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, daß der Außenbogen eine Curve von demselben Grade wie der Innenbogen bilden wird.

Für $x = o$ wird nach Gleichung (14):

$$(15).\quad \frac{\eta_0 - y_0}{P'_0} = \frac{H - y_0}{P_0},$$

woraus sich das Verhältniß zwischen P_0 und P'_0 ergiebt:

$$(16).\quad \frac{P'_0}{P_0} = \frac{\eta_0 - y_0}{H - y_0}.$$

Durch Verbindung der beiden Gleichungen (14) und (15) erhält man:

$$\frac{\eta - y}{\eta_0 - y,} = \frac{H - y}{H - y_0},$$

und durch Umsetzung dieser Gleichung:

$$\eta_0 - \eta = \left(1 - \frac{\eta_0 - y_0}{H - y_0}\right) . (y_0 - y).$$

Der Abkürzung wegen bezeichne man den in der Klammer befindlichen constanten Ausdruck durch K, nämlich:

$$(17).\quad K = 1 - \frac{\eta_0 - y_0}{H - y_0},$$

und es wird dann

$$(18).\quad \eta_0 - \eta = K . (y_0 - y).$$

Wenn y die Ordinate eines Kreises vom Radius r oder einer Ellipse von den halben Achsen a und b ist, so wird, wie aus Gleichung (18) folgt, η die Ordinate einer Ellipse sein, deren halbe Achsen im ersteren Fall gleich r und $K . r$, im zweiten Fall gleich a und $K . b$ sind.

Kapitel II.

§. 14.

Wenn im ersten Kapitel die Richtung der Gewölbfugen überall als vertikal angenommen wurde, so geschah dieses nur, um auf eine bequeme und einfache Weise die Gleichung für die Mittellinie des Druckes entwickeln und einige interessante Eigenschaften dieser Curve ableiten zu können. Es ist aber, wie in §. 4 gezeigt wurde, die unter dieser Voraussetzung bestimmte Mittellinie des Druckes auch als annähernd gültig für den Fall anzunehmen, daß die Gewölbfugen nicht vertikal, sondern normal zum Innenbogen gerichtet sind, wie es in der Praxis Regel zu sein pflegt. Daher wird es auch fernerhin, obgleich von der Hypothese der vertikalen Richtung der Fugen Abstand genommen werden wird, gestattet sein, die im ersten Kapitel entwickelten allgemeinen Gleichungen für die Mittellinie des Druckes zu benutzen.

§. 15.

Zunächst kommt es darauf an zu wissen, in welcher Weise über eine beliebige und beliebig gerichtete Fuge μm in Fig. 2 Tafel I. die zugehörige, im Punkte M angreifende Resultante der Pressungen p vertheilt sein wird. Wenn die Mittellinie des Druckes genau durch die Mitte der Fuge hindurchgeht, d. h. wenn der Punkt M genau mitten zwischen μ und m liegt, so darf man daraus schließen, daß der Druck, woraus sich die Resultante der Pressungen zusammensetzt, gleichmäßig über die ganze Fläche der Fuge vertheilt ist. Wenn aber die Resultante der Pressungen nicht in der Mitte der Fuge angreift, sondern der Punkt M vielleicht dem Innenbogen näher liegt, so ist das ein Zeichen davon, daß die Fuge in ihrem unteren Theile Mm stärker gedrückt wird als in dem oberen Theile $M\mu$. Wenn man nun annimmt, daß das Material der Gewölbsteine überhaupt durch den Druck etwas zusammengepreßt wird, so wird diese Zusammendrückung bei der unteren Kante m der Fuge am größten, bei der oberen Kante μ am geringsten sein, und in den dazwischenliegenden Punkten gleichförmig von der oberen nach der unteren Kante zu wachsen. Da ferner, nach einem bekannten Satze über die rückwirkende Festigkeit der Körper, die Tiefen der Zusammendrückungen von gleichen Flächeneinheiten der Fuge sich verhalten müssen wie die respectiven Pressungen, wodurch sie hervorgebracht sind, so darf man jetzt rückwärts schließen, daß die Pressung pro Flächeneinheit gleichmäßig von der oberen Kante μ nach der unteren Kante m der Fuge wachsen wird, wenn die Resultante der Pressungen in dieser Fuge näher bei m als bei μ angreift.

Man bezeichne die ganze Höhe $m\mu$ der Fuge durch l, den Abstand mM der Resultante der Pressungen, deren Richtung hier der

Einfachheit wegen als normal zur Fuge angenommen werden möge, von der unteren Kante der Fuge durch a, den Normaldruck pro Flächeneinheit im Punkte m durch q und im Punkte μ durch q_1. Weil nun nach dem obigen die Pressung pro Flächeneinheit zwischen der oberen und unteren Kante der Fuge gleichmäßig wachsen muß, so ist sie also in einem beliebigen Punkte der Fuge, dessen Abstand von der Kante m gleich w sein mag, gleich:

$$q - \frac{w}{l} \cdot (q - q_1),$$

oder es ist der Normaldruck für ein Flächen-Element von der Breite dw gleich:

$$\left[q - \frac{w}{l} \cdot (q - q_1)\right] . dw,$$

und das Moment des Normaldruckes in Bezug auf den Punkt M gleich:

$$(a - w) . dw . \left[q - \frac{w}{l} \cdot (q - q_1)\right].$$

Man erhält nun, da die Resultante der Pressungen p gleich der Summe aller einzelnen Pressungen auf jedes Flächen-Element der Fuge sein muß:

$$p = \int_0^l \left[q - \frac{w}{l} \cdot (q - q_1)\right] . dw,$$

oder integrirt und zusammengezogen:

$$(19). \quad p = \tfrac{1}{2} l . (q + q_1).$$

Ferner muß die Summe der Momente aller einzelnen Normaldrücke auf die Flächen-Elemente der Fuge in Bezug auf den Angriffspunkt M der Resultanten der Pressungen gleich o sein, nämlich:

$$o = \int_0^l \left[q - \frac{w}{l} \cdot (q - q_1)\right] . (a - w) . dw,$$

oder integrirt und zusammengezogen:

$$(\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{6} l) . q = (\tfrac{1}{3} l - \tfrac{1}{2} a) . q_1.$$

Wenn man nun hierin den aus Gleichung (19) gezogenen Werth von $q_1 = \frac{2p}{l} - q$ substituirt, so bekommt man:

$$(\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{6} l) . q = \frac{2p}{l} . (\tfrac{1}{3} l - \tfrac{1}{2} a) - q . (\tfrac{1}{3} l - \tfrac{1}{2} a),$$

und demzufolge:

$$(20). \quad q = \frac{p}{l^2} . (4 l - 6 a).$$

$$(21). \quad q_1 = \frac{p}{l^2} . (6 a - 2 l).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, daß für $a = \tfrac{1}{3} l$ der Druck q_1 an der oberen Kante $= o$ und der Druck q an der unteren Kante $= \frac{2p}{l}$, also doppelt so groß werden wird, als wenn der Gesammtdruck p gleichmäßig über die ganze Fläche der Fuge vertheilt wäre. Wenn $a < \tfrac{1}{3} l$ ist, so wird q noch größer und q_1 negativ; es würde dann die Fuge $m\mu$ an der unteren Kante m sehr stark zu-

sammengepreßt werden und an der oberen Kante μ sich öffnen, also das Gewölbe unstabil sein. Es ergiebt sich daraus also der Satz, daß bei einem stabilen Gewölbe die Mittellinie des Druckes sich weder dem Innen= noch dem Außenbogen weiter als auf $\frac{1}{3}$ der betreffenden Gewölbstärke nähern, oder von der Mitte keiner Fuge sich nicht weiter als um $\frac{1}{6}$ der ganzen Fugenlänge l entfernen darf.

Wenn P' denjenigen Normaldruck pro Flächeneinheit bezeichnet, welchen das Material der Gewölbsteine dauernd ertragen kann (wofür man in der Praxis den zehnten Theil des Gewichtes, worunter der Stein zerdrückt wird, zu setzen hat), so muß man, wenn man dem Gewölbe nur gerade die erforderliche Stärke geben will, für den Druck q an der stark gepreßten Kante der Bruchfuge den Werth von P' substituiren, dann erhält man nach Gleichung (20):

$$(22). \quad a = l.\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\,\frac{P'.l}{p}\right).$$

Die Gleichungen (19) bis (21) sind zwar unter der Voraussetzung, daß die Resultante der Pressungen normal zur Fuge gerichtet sei, abgeleitet worden; sie lassen sich aber auf ganz dieselbe Weise auch in allgemeiner Gültigkeit entwickeln, wenn man nur alle die einzelnen Pressungen q, q_1 worin man die Resultante p zerlegt denkt, als parallel zu deren Richtung annimmt. Man darf übrigens die Resultante der Pressungen für die Bruchfuge, worauf es hier namentlich ankommt, immer als annähernd normal zur Richtung dieser Fuge ansehen, weil die Mittellinie des Druckes sich dem Innenbogen bei der Bruchfuge am meisten nähert (im Verhältniß zur Pressung p), und weil sie deßhalb an dieser Stelle annähernd parallel zum Innenbogen und folglich annähernd normal zur Bruchfuge ist *).

§. 16.

Um über die Lage derjenigen Punkte, wo die Mittellinie des Druckes die Scheitelfuge und Bruchfuge schneidet, die geeigneten Annahmen machen zu können, erscheint es zweckmäßig, die übereinstimmenden Resultate der Coulomb'schen Theorie und der mannigfachen, über den Einsturz von Gewölben angestellten Versuche, insbesondere der Versuche von Boistard, zu benutzen, woraus die folgenden Thatsachen hervorgehen:

Bei allen den in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Gewölben, nämlich bei den halbkreisförmigen und gedrückten Bögen, liegt der Angriffspunkt der

*) Die Ableitung der Gleichungen 19 bis 22, welche Carvallo schon als bekannt voraussetzt, ist hier vollständig mitgetheilt worden, weil die ganze folgende Theorie sich auf diese Gleichungen stützt, und weil dieselben für deutsche Leser wenigstens wohl nicht als hinreichend bekannt angesehen werden dürfen.

Pressung in der Scheitelfuge nahe am Außenbogen, in der Bruchfuge nahe am Innenbogen. Bei den Spitzbögen nähert sich die Mittellinie des Druckes in der Scheitelfuge dem Innenbogen, in einer oberen Bruchfuge dem Außenbogen, und in einer unteren Bruchfuge wieder dem Innenbogen, ähnlich wie solches in Fig. 5, Tafel I. gezeichnet ist.

Die allgemeinen Formeln gestatten auch, solche Gewölbe zu construiren, wobei die Mittellinie des Druckes genau durch die Mitte der Scheitelfuge und der Bruchfuge hindurchgeht.

Alle diese verschiedenen Fälle werden nach einander in den folgenden Paragraphen betrachtet werden.

§. 17.

Wenn man in Fig. 1, Tafel I durch y_m, x_m, Y_m, X_m die Coordinaten des Innenbogens und der Mittellinie des Druckes auf der zum Innenbogen normalen Bruchfuge mM, und durch y'_m, Y'_m die ersten Differentialverhältnisse von y_m, Y_m bezeichnet, so ist die Tangente des Neigungswinkels der Fuge mM mit der Horizontalen gleich $\frac{1}{y'_m}$, und folglich:

$$\text{(I).}\quad X_m - x_m = y'_m \,.\, (Y_m - y_m).$$

Wenn P_m die Resultante der Pressungen für die Bruchfuge bezeichnet, so ist P_0 die horizontale Componente von P_m und es ist die Richtung von P_m tangential an die Mittellinie des Druckes im Punkte M. Weil dann also die Tangente des Winkels, welchen diese Richtung mit der Horizontalen einschließt, gleich Y'_m sein muß, so bekommt man:

$$\text{(II).}\quad P_0 \,.\, (1 + Y'^2_m)^{\frac{1}{2}} = P_m.$$

Die Bruchfuge des Gewölbes muß, nach den im §. 10 darüber gegebenen Erklärungen, den Innenbogen in demjenigen Punkte m schneiden, wofür das Moment $P.c$ vom Gewichte P des oberen Gewölbstückes dem Momente $P_0 . (Y_0 - y_m)$ des Horizontalschubes P_0 im Gewölbscheitel am nächsten kommt, d. h. wofür der Ausdruck $\frac{P.c}{Y_0 - y_m}$ seinen größten Werth annimmt. Wenn man nun den Hebelarm des Gewichtes P in Bezug auf den Punkt M der Mittellinie des Druckes durch b bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$P.b = P_0 . (Y_0 - Y_m) \text{ und}$$
$$c = b - (X_m - x_m).$$

In dieser Gleichung wird es, wie man sich durch einen Blick auf die Zeichnung leicht überzeugen kann, erlaubt sein, die Differenz $(X_m - x_m)$ gegen den Hebelarm b immer dann zu vernachlässigen, wenn die Spannweite des Gewölbes im Verhältniß zur Gewölbstärke ziemlich groß zu nennen ist. Man kann dann also annähernd $c = b$

setzen und man würde nun, um die Lage der Bruchfuge zu bestimmen, von dem Ausdruck

$$\frac{P.b}{Y_0 - y_m} = \frac{P_0.(Y_0 - Y_m)}{Y_0 - y_m}$$

das Maximum zu suchen haben, indem man das erste Differential dieses Ausdruckes entwickelt und gleich 0 setzt, also:

$$d\left(\frac{Y_0 - Y_m}{Y_0 - y_m}\right) = 0,$$

oder differentiirt:

$$\frac{(Y_0 - y_m).dY_m - (Y_0 - Y_m).dy_m}{(Y_0 - y_m)^2} = 0.$$

Hierin fällt der Nenner weg und man darf, wenn die Spannweite des Gewölbes im Verhältniß zur Gewölbstärke ziemlich groß ist, annähernd $dX_m = dx_m$ annehmen, dann erhält man, indem man die vorige Gleichung dadurch dividirt:

$$(Y_0 - y_m).Y'_m = (Y_0 - Y_m).y'_m,$$

oder:

$$y'_m\left(1 - \frac{Y_m - y_m}{Y_0 - y_m}\right) = Y'_m,$$

wofür man auch schreiben darf:

$$\text{(III).}\quad \left[1 + y'^2_m.\left(1 - \frac{Y_m - y_m}{Y_0 - y_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (1 + Y'^2_m)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Formel ist, wie bereits bei deren Herleitung gezeigt wurde, immer nur als annähernd gültig anzusehen und zwar nur dann brauchbar, wenn die Spannweite des betrachteten Gewölbes im Verhältniß zur Gewölbstärke ziemlich groß ist, was freilich wohl bei allen solchen Gewölben, wofür man überhaupt eine Rechnung vorzunehmen pflegt, stattfindet *).

Die Gleichung vom Innenbogen des Gewölbes ist gegeben, nämlich $y = \varphi(x)$, also ist:

$$\text{(IV).}\quad y_m = \varphi(x_m).$$

Ferner ergiebt sich aus der Gleichung (10), welche man nach §. 4 auch hier anwenden kann, indem man sich durch den Punkt M eine vertikale Fuge gelegt denkt:

$$\text{(V).}\quad P_0 = \frac{\varrho.F(X_m)}{Y_0 - Y_m}.$$

In dieser Gleichung ist die Form der Funktion $F(X_m)$ bei einem freien Gewölbe nur dann bekannt, wenn der Innen- und Außenbogen des Gewölbes gegeben sind, bei einem Gewölbe mit Uebermauerung oder Abdeckung aber von der Gestalt des Außenbogens unabhängig. Die Formeln (I) bis (V) sind ohne besondere Voraus-

---

*) Die Ableitung, welche Carvallo von der Formel (III) giebt, ist höchst mangelhaft und scheint auf unrichtigen Vorstellungen zu beruhen; er befindet sich auch im Irrthum, indem er behauptet, daß diese Formel ganz allgemeine Gültigkeit besitze.

setzungen abgeleitet und daher für alle Gewölbformen als brauchbar anzusehen; sie genügen aber nicht, um alle die darin vorkommenden unbekannten Größen zu bestimmen, und man muß daher die in §. 16 mitgetheilten Erfahrungssätze zu Hülfe nehmen, um für jeden besonderen Fall eine geeignete Annahme über die Lage des Angriffspunktes der Pressung in der Scheitelfuge und Bruchfuge machen zu können.

§. 18.

Für alle halbkreisförmigen oder gedrückten Bögen, d. h. für fast alle in der Praxis vorkommenden Gewölbe, weiß man, daß die Mittellinie des Druckes sich im Scheitel dem Außenbogen, in der Bruchfuge dem Innenbogen nähert. Man wird nun, wenn man dem Gewölbe sowohl bei der Scheitelfuge als der Bruchfuge nur gerade die erforderliche Stärke geben will, anzunehmen haben, daß an beiden Stellen der Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innen- oder Außenbogen gleich $1/3$ der betreffenden Gewölbstärke oder Fugenhöhe sei, und daß die größte Pressung pro Flächeneinheit an den stark gedrückten Kanten beider Fugen gleich P' sei. Demnach hat man für die Scheitelfuge:

$$\text{(VI).} \quad Y_0 - y_0 = 2/3\,(\eta_0 - y_0),$$

und ferner nach §. 14:

$$P' = \frac{2\,P_0}{\eta_0 - y_0},$$

oder nach Gleichung (VI):

$$\text{(VII).} \quad Y_0 - y_0 = 4/3 \cdot \frac{P_0}{P'}.$$

Ebenso erhält man für die Bruchfuge, wenn P_m die zugehörige Resultante der Pressungen bezeichnet:

$$P' = \frac{2\,P_m}{3\,Mm},$$

und da, wie sich durch eine einfache Rechnung zeigen läßt, $Mm = \frac{(1+y'_m{}^2)^{\frac{1}{2}}}{y'_m}\,.\,(X_m - x_m)$ sein muß, so wird:

$$\text{(VIII.)} \quad 2/3\,\frac{P_m}{P'} \cdot \frac{y'_m}{(1+y'_m{}^2)^{\frac{1}{2}}} = X_m - x_m.$$

Diese acht Gleichungen werden genügen, um in jedem einzelnen Falle die acht darin enthaltenen Unbekannten:

$$Y_0,\ Y_m,\ X_m,\ y_m,\ x_m,\ P_0,\ P_m \text{ und } P'$$

zu bestimmen. Wenn nämlich die Gewölbstärke im Scheitel $(\eta_0 - y_0)$ von vornherein gegeben ist, so ist die größte Pressung pro Flächeneinheit P' nicht mehr willkürlich *).

Wenn man die Gleichungen (I), (II), (III), (VII) und (VIII)

---

*) Carvallo giebt nur 7 Gleichungen und spricht nur von 7 Unbekannten; er übersieht nämlich, daß P_m ebenfalls unbekannt ist

Glied für Glied mit einander multiplicirt und die gemeinschaftlichen Faktoren aufhebt, so bekommt man:

$$\frac{Y_0 - y_0}{(1 + y'^2_m)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[1 + y'^2_m \cdot \left(1 - \frac{Y_m - y_m}{Y_0 - y_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot (Y_m - y_m),$$

oder wenn man zum Quadrat erhebt und nach Potenzen von $(Y_m - y_m)$ ordnet:

$$\text{(A.)}\ (Y_m - y_m)^2 \cdot \left[1 - \frac{(Y_0 - y_0)^2}{4} \cdot \frac{y'^2_m}{1 + y'^2_m} \cdot \frac{1}{(Y_0 - y_m)^2}\right] +$$

$$+ 2 \cdot (Y_m - y_m)^2 \cdot \frac{(Y_0 - y_0)^2}{4} \cdot \frac{y'^2_m}{1 + y'^2_m} \cdot \frac{1}{Y - y_m} - \frac{(Y_0 - y_0)^2}{4} = 0.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von Y_m, wenn Y_0, y_0 und y_m bekannt sind.

§. 19.

Für den Fall, daß das Gewölbe aus einem Minimum an Material construirt werden, d. h. daß die Mittellinie des Druckes genau durch die Mitte der Scheitelfuge und Bruchfuge gehen soll, sind die Gleichungen (VI) bis (VIII) des §. 18 nicht mehr gültig, sondern man hat anstatt dessen dann zu setzen:

$$Y_0 - y_0 = \tfrac{1}{2}\,(\eta_0 - y_0).$$

$$Y_0 - y_0 = \tfrac{1}{2}\,\frac{P_0}{P'}.$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{P_m}{P'} \cdot \frac{y'_m}{(1 + y'^2_m)^{1/2}} = X_m - x_m.$$

Durch Multiplikation der beiden letzten von diesen Gleichungen mit den Formeln (I), (II) und (III) erhält man:

$$\frac{Y_0 - y_0}{(1 + y'^2_m)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[1 + y'_m \cdot \left(1 - \frac{Y_m - y_m}{Y_0 - y_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (Y_m - y_m),$$

oder zum Quadrat erhoben und nach Potenzen von $(Y_m - y_m)$ geordnet:

$$\text{(B.)}\ (Y_m - y_m)^2 \cdot \left[1 - (Y_0 - y_0)^2 \cdot \frac{y'^2_m}{1 + y'^2_m} \cdot \frac{1}{(Y_0 - y_m)^2}\right] +$$

$$+ 2 \cdot (Y_m - y_m) \cdot (Y_0 - y_0)^2 \cdot \frac{y'^2_m}{1 + y'^2_m} \cdot \frac{1}{Y_0 - y_m} - (Y_0 - y_0)^2 = 0.$$

§. 20.

Bei den Gewölben in Form eines Spitzbogens nähert sich die Mittellinie des Druckes im Gewölbscheitel dem Innenbogen und es kommen nach dem in §. 16 mitgetheilten Satze für diesen Fall beide Bruchfugen des Gewölbes, wovon im §. 10 gesprochen wurde, in Betracht, und zwar zunächst nur die untere Bruchfuge, wo sich die Mittellinie des Druckes am meisten dem Innenbogen nähert, deßhalb, um danach die Größe des Horizontalschubes im Gewölbscheitel auf eben dieselbe Weise, wie es in den vorigen Paragraphen für die anderen Gewölbformen geschah, bestimmen zu können. Wenn man dem

Gewölbe nicht mehr als die gerade erforderliche Stärke geben will, so hat man nach §. 15 anzunehmen, daß der Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen in der Scheitelfuge sowohl als in der unteren Bruchfuge gleich $1/3$ der betreffenden Fugenhöhe sei, und daß die Pressung pro Flächeneinheit an der unteren Kante beider Fugen $= P'$ sei. Man erhält dann anstatt der Formeln (VI) bis (VIII) des §. 18 die folgenden Gleichungen:

$$Y_0 - y_0 = 1/3\, (\eta_0 - y_0).$$

$$Y_0 - y_0 = 2/3\, \frac{P_0}{P'}.$$

$$2/3\, \frac{P_m}{P'} \cdot \frac{y'_m}{(1 + y'^2_m)^{\frac{1}{2}}} = X_m - x_m.$$

Wenn man diese beiden letzteren Gleichungen mit den allgemeinen Formeln (I), (II) und (III) des §. 17 Glied für Glied multiplicirt, die gemeinsamen Factoren aufhebt, und die so erhaltene Gleichung auf beiden Seiten zum Quadrat erhebt, so bekommt man:

$$(C).\quad (Y_m - y_m)^2 \cdot \left[1 - (Y_0 - y_0)^2 \cdot \frac{y'^2_m}{1 + y'^2_m} \cdot \frac{1}{(Y_0 - y_m)^2}\right] +$$

$$+ 2(Y_m - y_m) \cdot (Y_0 - y_0)^2 \cdot \frac{y'^2_m}{1 + y'^2_m} \cdot \frac{1}{Y_0 - y_m} - (Y_0 - y_0)^2 = 0.$$

Wie man sieht, so stimmt diese Gleichung mit der Formel (B) des §. 19 ganz genau, und mit der Formel (A) des §. 18 bis auf die numerischen Factoren der einzelnen Glieder überein. Wenn man $(Y_m - y_m)$ nach einer von diesen drei quadratischen Gleichungen berechnet, so erhält man dafür zwei Werthe, einen negativen und einen positiven, wovon natürlicherweise nur der letztere brauchbar ist.

Um zu untersuchen, ob ein Spitzbogen die nöthige Stabilität besitze, muß man mit Hülfe der obigen Formeln zuerst die Lage der unteren Bruchfuge und danach die Größe des Horizontalschubes im Gewölbscheitel bestimmen, dann die Mittellinie des Druckes wirklich zeichnen und zusehen, ob sich dieselbe nicht an irgend einer Stelle dem Außenbogen weiter als bis auf $1/3$ der Gewölbstärke nähert. In den meisten Fällen wird ein solcher Ueberblick der Zeichnung genügen, um zu sehen, ob das Gewölbe in der oberen Bruchfuge die nöthige Stabilität besitzt. Wenn man aber die Lage der oberen Bruchfuge durch Rechnung bestimmen will, so muß man nach §. 10 von dem Ausdruck $\varrho \frac{(\eta - y) \cdot dx^2}{Y_0 - \eta}$. das Minimum suchen (es läßt sich nämlich durch eine ganz ähnliche Rechnung, wie in §. 17 bei Ableitung der Formel (III), zeigen, daß dieser Ausdruck auch dann, wenn die Fugen normal zum Innenbogen stehen, als annähernd richtig anzusehen ist).

Wenn auch im Vorstehenden die allgemeinen Formeln zur Untersuchung der Stabilität eines Spitzbogens gegeben wurden, so erscheint es doch in den meisten Fällen, namentlich wenn der Bogen stark überhöht ist, mißlich, davon Gebrauch zu machen. Unsere ganzen Rechnungen stützen sich nämlich auf die allgemeine Gleichung der Mittel-

linie des Druckes, welche unter der Voraussetzung abgeleitet wurde, daß die Gewölbfugen vertikal gerichtet seien, und sind deßhalb überhaupt für alle Gewölbe nur als annähernd richtig anzunehmen. Diese Voraussetzung weicht aber begreiflicherweise gerade bei den stark überhöhten Bögen am weitesten von der Wahrheit ab. Man wird daher am besten thun, bei der Betrachtung eines Spitzbogens sich streng nach der Natur des Gewölbes zu richten, d. h. die Gleichung der Mittellinie des Druckes unter der Voraussetzung, daß alle Fugen normal zum Innenbogen stehen, abzuleiten, wenn auch die Rechnung dadurch weitläufiger wird, und die Lage der unteren und oberen Bruchfuge nach dem in §. 9 ausgesprochenen Satze, welcher unter jeder Voraussetzung über die Richtung der Fugen gültig ist, zu bestimmen*).

§. 21.

Bei den gewöhnlichen halbkreisförmigen oder gedrückten Bögen, wofür die Gleichungen (I) bis (VIII) in §. 17 und 18 abgeleitet worden sind, kann man, wenn die Form des Außenbogens noch nicht gegeben ist, die Bedingung stellen, daß der rechtwinklige Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen in der Scheitelfuge ebenso groß sein soll als in der Bruchfuge; diese Bedingung wird, wie sich durch eine sehr einfache Rechnung zeigen läßt, durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$X_m - x_m . \frac{(1+y'^2_m)^{\frac{1}{2}}}{y'_m} = Y_0 - y_0 .$$

Wenn man nun diese Gleichung mit den Formeln (II), (VII) und (VIII) Glied für Glied multiplicirt und zusammenzieht, so erhält man:

$$(1 + Y'^2_m)^{\frac{1}{2}} = 2,$$

und demzufolge:

$$Y'_m = \sqrt{3} = tg\ 60^o.$$

Es muß also, wenn die oben genannte Bedingung erfüllt werden soll, die Mittellinie des Druckes mit der Horizontalen einen Winkel von 60° in der Bruchfuge einschließen. Da aber diese Linie in der Bruchfuge, wo sie sich dem Innenbogen verhältnißmäßig zur Fugenhöhe am weitesten nähert, als annähernd parallel zu demselben,

---

*) Carvallo geräth bei der Betrachtung der Spitzbögen ganz und gar auf Irrwege. Er spricht nämlich nur von einer Bruchfuge, und bestimmt die Lage dieser Bruchfuge eben so wie für gedrückte Bögen nach der Bedingung, daß die Mittellinie des Druckes an dieser Stelle dem Innenbogen sich möglichst nähern soll (unter welcher Bedingung auch die Gleichung (III) abgeleitet ist); dann nimmt er zugleich an, daß dieselbe Linie sich an dieser Stelle auch dem Außenbogen möglichst weit, nämlich bis auf 1/3 der ganzen Fugenhöhe, nähern soll, indem er also die untere und obere Bruchfuge mit einander verwechselt. Die von Carvallo für diesen Fall entwickelten Formeln sind daher unbrauchbar und ein später im Kapitel VI. danach berechnetes Beispiel unrichtig.

oder als annähernd normal zur Bruchfuge angesehen werden darf, so wird in diesem Fall die Richtung der Bruchfuge einen Winkel von etwa 60° mit der Vertikalen einschließen. Man nennt diesen Winkel den Bruchwinkel.

Die obige Bedingung wird bei den in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Gewölben fast immer annähernd erfüllt. Wie nämlich aus den mannigfachen, über den Einsturz der Gewölbe angestellten Versuchen, welche bereits in §. 3 und 16 erwähnt wurden, hervorgeht, so bildet die Richtung der Bruchfuge für gewöhnlich einen Winkel von 54 bis 60 Grad mit der Verticalen. Nur bei solchen Segmentbögen, deren halber Centriwinkel kleiner als 54° ist, liegt die Bruchfuge am Gewölbanfang.

Für die Praxis kommt wenig darauf an, die Lage der Bruchfuge mit völliger Genauigkeit zu bestimmen, weil an dieser Stelle die Mittellinie des Druckes fast parallel zum Innenbogen läuft und daher auf eine größere Länge des Bogens überall fast die gleiche Neigung zum Bruch vorhanden ist, was auch schon genugsam aus der Thatsache hervorgeht, daß ein einstürzendes Gewölbe meistens nicht in einer einzigen Bruchfuge, sondern gleichzeitig in mehreren dicht neben einander liegenden Fugen zerbricht. Im Allgemeinen wird man also, wenn der Angriffspunkt und die Größe des Horizontalschubes im Gewölbscheitel erst näher zu bestimmen ist, darüber solche Annahmen zu machen haben, daß die danach ermittelte Richtung der Bruchfuge einen Winkel von 54 bis 60 Grad mit der Vertikalen einschließt. Zu dem Ende genügt es für Gewölbe von gewöhnlicher Form, welche eine horizontale Abdeckung von geringer Höhe über dem Scheitel tragen, und von nicht zu großer Spannweite die folgende empirische Formel von Perrouet zur Berechnung der Gewölbstärke $\eta_0 - y_0$ im Scheitel anzuwenden:

$$\text{(IX).}\quad \eta_0 - y_0 = 0{,}0347 \,.\, W + 0{,}325,$$

worin W die Spannweite des Gewölbes bezeichnet. *)

§. 22.

In den vorangehenden Betrachtungen dieses Kapitels ist es immer als die Hauptbedingung der Stabilität eines Gewölbes angesehen worden, daß die Pressung pro Flächeneinheit an keiner Kante einer Gewölbfuge einen gewissen erlaubten Werth übersteigen darf. Zur vollständigen Lösung der Frage bleibt jetzt noch eigentlich übrig zu untersuchen, ob auch an keiner Stelle des Gewölbes ein Gleiten der Gewölbsteine in den Fugen stattfinden wird.

Es bezeichne für einen beliebigen Punkt M der Mittellinie des Druckes:

---

*) Andere empirische Formeln, welche auch zur Bestimmung der Stärke von großen Brückengewölben zweckmäßig angewendet werden können, siehe im Anhange.

p, die Resultante der Pressungen;
ω, den Winkel, welchen die Richtung von p mit der Fuge einschließt;
f, den Coefficienten der Reibung des Steines auf seinem Mörtelbett.

Es ist nun die Kraft, welche ein Gleiten hervorzubringen sucht, gleich $p . cos\ \omega$, und der Reibungswiderstand, der sich diesem Gleiten widersetzt, gleich: $f . p . sin\ \omega$; wenn also ein Gleiten in dieser Fuge nicht stattfinden soll, so muß

$$f . p . sin\ \omega > p . cos\ \omega.$$

sein, oder vereinfacht:

$$f > cotg\ w.$$

Da man nun annehmen darf, daß die Richtung der Kraft p annähernd tangential an die Mittellinie des Druckes ist, so hat man zu untersuchen, ob diese Linie mit keiner Gewölbfuge einen Winkel einschließt, dessen Cotangente größer als der Reibungs-Coefficient f ist.

In der Praxis kommt ein Einsturz der Gewölbe durch Gleiten fast niemals vor und ist überhaupt, wie die darüber angestellten Versuche und die nach der Coulomb'schen Theorie berechneten Tabellen von Petit und Garidel zeigen, nur für schwer belastete Gewölbe von sehr bedeutender Gewölbstärke, die wohl in Festungswerken vorkommen, zu fürchten. Bei andern Gewölben von gewöhnlicher Construction braucht man aber die Stabilität des Gewölbes in Bezug auf Gleiten gar nicht einmal zu untersuchen.

Kapitel III.

§. 23.

In den beiden ersten Kapiteln ist nur von der Stabilität des eigentlichen Gewölbes, soweit dasselbe zwischen Scheitel und Gewölbanfang enthalten ist, die Rede gewesen. Zur Bestimmung der erforderlichen Widerlager- und Pfeiler-Stärken sind neue Formeln zu entwickeln.

Es seien zunächst die Dimensionen eines Mittelpfeilers zu bestimmen, worauf sich zwei symmetrische Gewölbe stützen, wenn überdies der Pfeiler in seiner oberen Breite noch bis über den Gewölbanfang hinaus fortgeführt ist oder vielmehr, wie es in der Praxis meistens der Fall ist, die horizontale Uebermauerung oder Abdeckung der Gewölbe über den Pfeiler hinweg fortläuft.

Es bezeichne:

l, die Dicke des Mittelpfeilers am Gewölbanfang;
l', die Dicke desselben an seiner Basis;
H_1, die Höhe der horizontalen Oberfläche der Abdeckung über Gewölbanfang;

H_2, die Höhe des Pfeilers von seiner Basis bis zum Gewölbanfang;
ϱ, die Dichtigkeit der Abdeckung;
P, den von beiden Gewölben gemeinsam ausgeübten Vertikaldruck, d. h. gleich dem doppelten Gewicht derjenigen Masse, welche zwischen 2 durch den Scheitel und Anfänger eines Gewölbes gelegten Vertikalen enthalten ist.

Der Mittelpfeiler besteht aus horizontalen Schichten; da er 2 symmetrische Gewölbe zu tragen hat, so muß die Richtung der Resultante der Pressungen für jede Horizontalschicht mit der senkrechten Mittellinie des Pfeilers zusammenfallen, und wird daher über die ganze Fläche einer solchen Schicht immer als gleichmäßig vertheilt anzunehmen sein. Die Pressung, welcher die am Gewölbanfang befindliche Horizontalschicht des Pfeilers ausgesetzt ist, beträgt im Ganzen:

$$P + \varrho \, . \, l \, . \, H_1,$$

und wenn man dem Pfeiler an seinem Kopfe keine überflüssige Stärke geben will, so hat man zu setzen:

$$\frac{P + \varrho \, . \, l \, . \, H_1}{l} = P',$$

worin P' wieder die Pressung pro Flächeneinheit, welche der Stein noch dauernd ertragen kann, bezeichnet.

Durch Umsetzung folgt aus der letzteren Gleichung:

$$(23.) \quad l = \frac{P}{P' - \varrho \, . \, H_1}.$$

Nach der Basis zu muß der Pfeiler, wenn seine Stärke am Kopfe auf das geringste zulässige Maß eingeschränkt ist, natürlicherweise an Stärke zunehmen. Gewöhnlich pflegt man die Seitenflächen des Mittelpfeilers als geradlinige Dossirungen zu bilden. Es ist also die Querschnittsfläche des Pfeilers, von seiner Basis bis zum Kopf gerechnet, gleich: $\frac{l + l'}{2} \, . \, H_2$, und folglich der gesammte Vertikaldruck, welcher sich gleichmäßig über die Basis des Pfeilers vertheilt, gleich:

$$P + \varrho \, . \, l \, . \, H_1 + \varrho \, . \, \frac{l + l'}{2} \, . \, H_2.$$

Wenn man nun den Pfeiler an seinem Fuß nicht unnöthig dick machen will, so muß man schreiben:

$$\frac{P + \varrho \, . \, l \, . \, H_1 + \varrho \, . \, \frac{l + l'}{2} \, . \, H_2}{l'} = P',$$

oder wenn man diese Gleichung für l' auflöst:

$$(24). \quad l' = \frac{P + \varrho \, . \, l \, . \left(H_1 + \frac{H_2}{2} \right)}{P' - \varrho \, . \, \frac{H_2}{2}} = l \, . \left(\frac{P' + \varrho \, . \, \frac{H_2}{2}}{P' - \varrho \, . \, \frac{H_2}{2}} \right).$$

§. 24.

Man kann die Mittelpfeiler auch aus einem Minimum an Material construiren, so daß sie Körper von gleichem Widerstande bilden, worin die Pressung pro Flächeneinheit in den verschiedenen Horizontalschichten überall dieselbe ist.

Es bezeichne:

p, die constante Pressung **pro** Flächeneinheit;

z, die Höhe einer beliebigen Horizontalschicht unter dem Gewölbanfang oder Kopf des Pfeilers;

u, die halbe Breite dieser Schicht.

Die früheren Bezeichnungen von ϱ und l mögen beibehalten werden.

Wenn die Stärke der betrachteten Schicht gleich dz ist, so ist ihr Gewicht gleich:

$$2\,\varrho\,.\,u\,.\,dz,$$

worum die Gesammtpressung, welche auf die zunächst darunter liegende Schicht übertragen wird, vermehrt ist. Damit bei dieser Vermehrung des Gesammtdruckes die Pressung **pro** Flächeneinheit doch constant bleiben kann, so muß die Breite der untern Schicht um ein gewisses Maß $2\,du$ gegen die Breite $2u$ der oberen Schicht zunehmen, und es muß diese Erbreiterung des Pfeilers der Vergrößerung des Gesammtdruckes angemessen sein, nämlich:

$$p\,.\,du = \varrho\,.\,u\,.\,dz, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{\varrho}{p}\,.\,dz,$$

und integrirt:

$$Log.\ nat.\ (u) = \frac{\varrho}{p}\,.\,z + C,$$

worin C eine Constante bezeichnet. Aus dieser Gleichung geht der Satz hervor, daß die Seitenflächen eines Mittelpfeilers, welcher einen Körper von gleichem Widerstande bildet, nach dem Bogen einer logarithmischen Spirale geformt sein müssen.

Durch Umsetzung der obigen Gleichung erhält man:

$$u = C\,.\,e^{\frac{\varrho}{p}\,.\,z},$$

und da für $z = 0$, d. h. für den Kopf des Pfeilers, $u = \frac{1}{2}l$ ist, so wird $C = \frac{l}{2}$ und

$$u = \frac{l}{2}\,.\,e^{\frac{\varrho}{p}\,.\,z},$$

oder wenn man gewöhnliche Briggische Logarithmen einführt:

$$log\ u = \frac{\varrho}{p}\cdot z\,.\ log\ e + \frac{l}{2}.$$

Diese Form der Gleichung gestattet, für gleichmäßig wachsende Werthe von z auf leichte Weise die entsprechenden Werthe von u zu

berechnen, um daraus eine Tabelle zusammenzustellen. Wenn man nämlich den constanten Coefficienten $\frac{\varrho}{p} . \log e$ der Kürze wegen gleich A setzt, so hat man:

$$\log u = A . z + \frac{l}{2}, \text{ und}$$

$$\triangle \log u = A . \triangle z.$$

Wenn man nun, um verschiedene Punkte der Curve zu construiren, die Abscissen z gleichmäßig wachsen läßt, d. h. den Zuwachs $\triangle z$ als constant annimmt, so wird der Werth des Logarithmus von u jedesmal gleichmäßig um die constante Größe $A . dz$ zunehmen.

Die Querschnittsfläche Q des Pfeilers, zwischen dem Gewölbanfang und der betrachteten Schicht, welche um die Höhe z_1 darunter liegt, ergiebt sich aus der folgenden Gleichung:

$$\frac{Q}{2} . \int_0^{z_1} u . dz = \frac{l}{2} . \frac{p}{\varrho} . e^{\frac{\varrho}{p} z_1} - \frac{l}{2} . \frac{p}{\varrho},$$

oder einfacher ausgedrückt:

$$Q = \frac{2p}{\varrho} . \left(u_1 - \frac{l}{2}\right) = \frac{2p}{\varrho} . (u_1 - u_0).$$

Die Anwendung der in diesem Paragraphen entwickelten Formeln auf die Praxis ist wegen der schwierigen Ausführung von Pfeilern mit gekrümmten Seitenflächen äußerst selten. Man hat dann natürlich P' für die constante Pressung pro Flächeneinheit p zu substituiren.

§. 25.

Zur Bestimmung der erforderlichen Dimensionen eines Widerlagers hat man zunächst die Gleichung der Mittellinie des Druckes für dasselbe abzuleiten. Zu dem Ende mag in Fig. 1, Taf. **I.** die Vertikale, welche durch den Gewölbanfang, d. h. den untersten Punkt des Innenbogens geht, als neue Abscissen-Achse, und die Horizontale, welche die Basis des Widerlagers bildet, als neue Ordinaten-Achse angesehen werden.

Die innere, d. h. dem Gewölbe zugekehrte, Seitenfläche des Widerlagers pflegt nahezu oder ganz senkrecht zu sein, und würde also im letzteren Falle mit der Abscissen-Achse zusammenfallen, was hier der Einfachheit wegen angenommen werden möge. Der Außenbogen oder die äußere Seitenfläche des Widerlagers besteht bei Brückengewölben gewöhnlich aus vielen ziemlich gleichmäßigen kleinen Absätzen, welche man sich auch durch eine mitten hindurchlaufende continuirliche krumme Linie ersetzt denken darf. Oben ist das Widerlager meistens durch eine Fortsetzung vom Außenbogen des eigentlichen Gewölbes begrenzt. Das Mauerwerk der Widerlager besteht bekanntlich eben so wie bei den Mittelpfeilern fast immer nur aus horizontalen Schichten, wovon man eine jede als ein zusammenhängendes Ganzes betrachten darf. Wir werden uns daher im Folgenden zur Bestimmung

der Mittellinie des Druckes die Widerlager in lauter horizontale Elemente von einer sehr geringen Höhe dx als zerlegt zu denken haben *).

Diejenigen Gewölbe, wofür man überhaupt eine Berechnung der Widerlagstärken vorzunehmen pflegt, sind selten freistehend, fast immer Brückengewölbe mit einer, über Pfeiler, Gewölbe und Widerlager fortlaufenden, horizontalen Abdeckung, die mitunter aus Mauerwerk, in den meisten Fällen aber aus Erdschüttung besteht. Ferner lehnt sich gewöhnlich eine Erdmasse, deren Höhe gleich dem Vertikalabstand von der Basis des Widerlagers bis zur horizontalen Oberkante der Brücke ist, von seitwärts gegen die äußere Fläche oder den Außenbogen des Widerlagers, und übt dagegen einen Seitenschub aus, welcher dem Horizontalschub des Gewölbes entgegen wirkt. Man kann indessen nicht darauf rechnen, daß dieser Erddruck in jedem Augenblick wirklich stattfindet, weil es bei trockner Jahreszeit und wenn die Erde dicht gelagert ist, leicht möglich sein kann, daß die Erde gar keinen oder nur einen sehr geringen Seitendruck gegen das Mauerwerk ausübt. Um völlig sicher zu gehen, wird man also die erforderliche Widerlagsstärke für zwei verschiedene Fälle zu bestimmen haben, daß entweder nur der Horizontalschub des Gewölbes, oder auch daß derselbe gemeinsam mit dem Seitendruck der Erde wirksam ist. Wie diese Rechnung wirklich vorzunehmen ist und sich für Anwendungen auf die Praxis wesentlich vereinfachen läßt, wird nachstehend aus §. 28 und den Beispielen im Kapitel VI. genugsam hervorgehen.

Ueber die Art und Weise, wie die Erde auf und gegen das Mauerwerk drückt, müssen zur Vermeidung unnöthiger Schwierigkeiten und Weitläufigkeiten der Rechnung einige einfache Voraussetzungen gemacht werden, besonders deßhalb weil man bei Bestimmung des Erddruckes nach theoretischen Formeln überhaupt immer nur eine annähernde Genauigkeit erwarten darf. Der Einfachheit wegen ist zunächst anzunehmen, daß die Dichtigkeit der Erde gleich derjenigen des Mauerwerks sei; die unter dieser Voraussetzung berechneten Widerlagsstärken haben immer einen gewissen Ueberschuß an Stabilität, weil das Mauerwerk in der Regel schwerer als der Boden ist.

Weil die meisten Bodenarten, wenn sie vom Wasser durchzogen

---

*) Carvallo bestimmt die Mittellinie des Druckes in den Widerlagern auf die Weise, daß er sich das Mauerwerk aus lauter vertikalen Elementen bestehend denkt, was doch offenbar zu weit von der Wirklichkeit abweicht; außerdem begeht er den großen Fehler, daß er bei Ermittelung des Druckes auf die Basis des Widerlagers das Gewicht desjenigen Theiles des Widerlagers, welcher außerhalb der, durch den untersten Punkt jener Mittellinie gezogenen Vertikalen liegt, ganz vernachlässigt, so daß die von ihm berechneten Formeln zur Bestimmung der Widerlagsstärken ganz falsch sind und viel zu geringe Stärken in den meisten Fällen geben. Es mußte hier also diese Rechnung in einer ganz neuen Weise begründet werden.

sind, nur eine sehr geringe Cohäsion besitzen, so wird man der Sicherheit wegen am besten die Cohäsion der Erdmasse ganz zu vernachlässigen haben. Dann darf man sich denken, daß das Gewölbe mit der vertikal darüber liegenden Masse, ferner das Widerlager mit der senkrecht darauf liegenden Masse, und endlich diejenige Erdmasse, welche von seitwärts gegen das Widerlager drückt (das Prisma des größten Druckes), 3 abgesonderte, von einander unabhängige Körper bilden, welche nur Pressungen gegen einander ausüben. In der That braucht man nämlich nur das Gewicht oder den Vertikaldruck, nicht den horizontalen Seitendruck, welchen die oberhalb des Gewölbes und des Widerlagers liegende Erdmasse ausübt, zu berücksichtigen, weil derselbe gleichmäßig stark nach beiden Seiten hin drückt und somit nur zu einer unveränderten Fortpflanzung der von außen her gegen das Mauerwerk ausgeübten Horizontalpressungen beiträgt.

Streng genommen müßte man zwar eigentlich voraussetzen, daß die über dem Widerlager liegende Erdmasse an dem Außenbogen des Widerlagers hinabzugleiten suchen und demzufolge mit der äußeren Erde zusammen von seitwärts gegen das Widerlager drücken würde. Hierdurch würde indessen die Rechnung sehr verwickelt gemacht werden, auch erscheint ein derartiges Herabgleiten als unwahrscheinlich, weil der Außenbogen des Widerlagers meistens nicht eine glatte Fläche bildet, sondern aus lauter Absätzen besteht. Die hiernach berechneten Widerlagsstärken fallen freilich bei hohen Widerlagern etwas, aber nicht wesentlich, größer aus, als wenn man sie nach unserer obigen einfachen Annahme bestimmt; dabei ist jedoch wohl zu beachten, daß dieser geringe Unterschied durch die, für die Stabilität günstige, Voraussetzung, daß die Dichtigkeit der Erdmasse gleich derjenigen des Mauerwerks angesehen werden solle, mehr als aufgewogen wird. Ein Herabgleiten der über dem Gewölbe liegenden Erdmasse ist gar nicht zu befürchten, weil fast immer die obere Fläche des eigentlichen Gewölbes ziemlich flach ist und an keiner Stelle mit der Horizontalen einen Winkel einschließt, welcher größer als der Reibungswinkel der Erde wäre.

§. 26.

Zunächst sei die Gleichung der Mittellinie des Druckes für ein Widerlager, welches eine bis zur horizontalen Oberfläche der Brücke reichende Erdschüttung trägt, abzuleiten, und zwar unter der Voraussetzung, daß nur der Schub des Gewölbes, nicht aber der Seitendruck der äußeren Erde gegen das Widerlager berücksichtigt werden soll.

Es bezeichne in Fig. 1, Tafel I:

OZ, die Abscissen-Achse;

OU, die Ordinaten-Achse;

H_3, die Höhe der horizontalen Oberfläche der Brücke über der Basis des Widerlagers OU;

Z_n, die Abscisse des Punktes M_n der Mittellinie des Druckes in der

Abscissen-Achse, d. h. in der als senkrecht durch den Gewölbanfang gehend gedachten Gewölbfuge;

P_0, den im Punkte M_n angreifenden Horizontalschub des Gewölbes;

P_v, das daselbst angreifende Gewicht des halben Gewölbes;

Z, die Abscisse einer beliebigen Horizontalfuge $m\mu$ des Widerlagers;

Y_q, die Ordinate mM der Mittellinie des Druckes in dieser Fuge;

η_q, die Ordinate $m\mu$ vom Außenbogen des Widerlagers in dieser Fuge.

ϱ, die als gleich gedachte Dichtigkeit des Mauerwerks und der Erdschüttung.

Wenn kein Gewölbe sich auf das Widerlager stützte, so würde der Druck, welchen die horizontale Fuge $m\mu$ zu ertragen hat, gleich dem Gewichte $\varrho \cdot \eta_q \cdot (H_3 - Z)$ der senkrecht darüber liegenden Mauer- und Erdmasse anzunehmen, und als in der Mitte der Fuge angreifend anzusehen sein. Außerdem wirken aber noch die beiden, in M_n angreifenden, äußeren Kräfte P_0 und P_v auf das Widerlager ein; um den gemeinsamen Angriffspunkt M dieser drei Kräfte in der horizontalen Fuge $m\mu$ zu bestimmen, hat man die Summe ihrer Momente in Bezug auf diesen Punkt gleich 0 zu setzen, nämlich:

$$0 = (Y_q - \tfrac{1}{2}\eta_q) \cdot \varrho \cdot \eta_q \cdot (H_3 - Z) + P_v \cdot Y_q - P_0 \cdot (Z_n - Z),$$

oder auf Y_q reducirt:

$$(25). \quad Y_q = \frac{\tfrac{1}{2}\eta_q^2 \cdot \varrho \cdot (H_3 - Z) + P_0 \cdot (Z_n - Z)}{\varrho \cdot \eta_q \cdot (H_3 - Z) + P_v}.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Mittellinie des Druckes, wenn die Form des Außenbogens schon von vorn herein gegeben ist. Wenn aber die zweckmäßigste Form des Außenbogens erst näher bestimmt werden soll, so wird man am besten von der Bedingung ausgehen, daß die Stärke des Widerlagers an keiner Stelle überflüssig groß sein, d. h. daß die Pressung pro Flächeneinheit an einer Kante jeder beliebigen Horizontalfuge gleich dem größten erlaubten Druck P' sein soll. Man hat also, wenn in der betrachteten Horizontalfuge $m\mu$ die Mittellinie des Druckes sich der äußeren Fläche des Widerlagers mehr nähert als der inneren (wie es im größten Theil des Widerlagers der Fall ist), mit Benutzung der Formel (22) hier zu setzen, wenn man nur den auf die Fläche $m\mu$ ausgeübten Vertikaldruck $\varrho \cdot \eta \cdot (H_3 - Z) + P_v$, der im Punkte M als angreifend gedacht werden muß, berücksichtigt:

$$\eta_q - Y_q = \tfrac{1}{6}\,\eta_q \cdot \left(4 - \frac{P' \cdot \eta_q}{\varrho \cdot \eta_q \cdot (H_3 - Z) + P_v}\right),$$

oder wenn man den Werth von Y_q aus Gleichung (25) hier hinein substituirt:

$$\eta_q - \frac{\tfrac{1}{2}\eta_q^2 \cdot \varrho (H_3 - Z) + P_0 \cdot (Z_n - Z)}{\varrho \cdot \eta_q \cdot (H_3 - Z) + P_v} = \tfrac{2}{3}\eta_q - \frac{\tfrac{1}{6} P' \cdot \eta_q^2}{\varrho \cdot \eta_q \cdot (H_3 - Z) + P_v}.$$

Diese Gleichung muß man auf beiden Seiten mit dem Ausdruck $(\varrho . \eta_q . [H_3 - Z] + P_v) . 6$ multipliciren und nach Potenzen von η_q ordnen, dann erhält man:

$$\eta_q^2 . (P' - \varrho . [H_3 - Z]) + 2 . \eta_q . P_v = 6 P_0 . (Z_n - Z),$$

oder durch einfache Auflösung dieser quadratischen Gleichung:

$$(26.) \quad \eta = - \frac{P_v}{P' - \varrho . (H_3 - Z)} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{P_v}{P' . \varrho . (H_3 - Z)}\right)^2 + \frac{6 P_0 . (Z_n - Z)}{P' - \varrho . (H_3 - Z)}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel in dieser Gleichung muß positiv sein, weil η_q sonst einen negativen Werth annehmen würde.

Diese Gleichung gilt nur für den unteren Theil des Widerlagers, wo die Mittellinie des Druckes näher am Außenbogen als an der inneren Fläche liegt; diejenige Horizontalfuge aber, welche von der Mittellinie des Druckes gerade in der Mitte durchschnitten wird, und wo also der gesammte Vertikaldruck $P_v + \varrho . \eta'_q . (H_3 - Z')$ sich gleichmäßig über die ganze Fläche der Fuge vertheilen wird, bestimmt sich, wenn man die Bedingung festhält, daß das Widerlager auch an dieser Stelle nicht mehr als die gerade erforderliche Stärke haben soll, aus den folgenden Gleichungen, worin die Bezeichnungen Z' η'_q und Y'_q sich auf diese betrachtete Horizontalfuge beziehen:

$$\eta'_q . P' = P_v + \varrho . \eta'_q . (H_3 - Z'), \text{ und}$$

$$\eta'_q = 2 Y'_q = \frac{\eta'^2_q . \varrho . (H_3 - Z') + 2 P_0 . (Z_n - Z')}{\varrho . \eta'_q . (H_3 - Z') + P_v}.$$

Der Werth von η'_q, aus der ersteren von diesen beiden Gleichungen gezogen, ist gleich:

$$(27.) \quad \eta'_q = \frac{P_v}{P' - \varrho . (H_3 - Z')};$$

und wenn man diesen Werth in die zweite Gleichung substituirt und dieselbe dann nach Potenzen von Z' ordnet, so erhält man:

$$- Z'^2 - \left(\frac{P'}{\varrho} - H_3 - Z_n\right) . Z' = \frac{P_v^2}{2 P_0 . \varrho} - \left(\frac{P'}{\varrho} - H_3\right) . Z_n$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergiebt:

$$(28.) \quad Z' = - 1/2 \left(\frac{P'}{\varrho} H - Z_n\right) +$$

$$+ \sqrt{1/4 \left(\frac{P'}{\varrho} - H_3 - Z_n\right)^2 - \frac{P_v^2}{2 P_0 . \varrho} + \left(\frac{P'}{\varrho} - H_3\right) . Z_n}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel in dieser Gleichung muß offenbar positiv sein, weil sonst Z' nicht einen positiven Werth annehmen könnte.

Die Gleichung des Außenbogens für den oberen Theil des Widerlagers, wo die Mittellinie des Druckes sich der inneren Fläche des Widerlagers nähert, wird sich auf dieselbe Weise ableiten lassen und eine ganz ähnliche Form bekommen wie die Gleichung (26); für die

Anwendung ist es aber von keiner Wichtigkeit, diese Ableitung hier wirklich vorzunehmen, weil die Stärke des Widerlagers in seinem oberen Theile, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, immer auf eine andere Weise bestimmt werden muß.

Die erforderliche Stärke E des Widerlagers an seiner Basis ergiebt sich aus Gleichung (26), wenn man darin $Z = 0$ setzt:

$$(29.)\quad E = -\frac{P_v}{P' - \varrho \, . \, H_3} + \sqrt{\left(\frac{P_v}{P' - \varrho \, . \, H_3}\right)^2 + \frac{6\, P_0 \, . \, Z_n}{P' - \varrho \, . \, H_3}}.$$

Es bleibt jetzt noch übrig zu untersuchen, ob auch in keiner Horizontalfuge des Widerlagers ein Gleiten des darüber liegenden Theiles nach außen zu stattfinden wird. Die stärkste Neigung wird in der obersten, durch den Angriffspunkt M_n des Gewölbschubes gehenden Fuge, deren ganze Breite gleich η_n sein möge, vorhanden sein, weil für diese Fuge der Vertikaldruck $P_v + \varrho \, . \, \eta_n \, . \, (H_3 - Z_n)$ am geringsten ist. Wenn nun f den Coefficienten der Reibung vom Stein auf Stein bezeichnet, so muß, falls kein Gleiten eintreten soll, die folgende Gleichung stattfinden:

$$(30.)\quad f > \frac{P_0}{P_v + \varrho \, . \, \eta_n \, . \, (H_2 - Z_n)}.$$

§. 27.

Unter derselben Bedingung wie im vorigen Paragraphen, nämlich daß man dem Widerlager an keiner Stelle eine überflüssige Stärke geben will, sei die Gleichung des Außenbogens und der Mittellinie des Druckes für ein Widerlager abzuleiten, wenn man außer dem Gewölbschub auch noch einen von außen her gegen das Widerlager wirkenden Erddruck zu berücksichtigen hat. Die sämmtlichen Bezeichnungen des §. 26 mögen beibehalten und ferner der sogenannte Schüttungswinkel der Erde, d. h. die Ergänzung des Böschungswinkels zu 90^0, durch Ψ bezeichnet, sowie die Dichtigkeit der Erde gleich derjenigen des Mauerwerks, nämlich $= \varrho$, angenommen werden. Die Höhe der hinter dem Widerlager liegenden Erdmasse ist für gewöhnlich $= H_3$, d. h. gleich der Höhe des Widerlagers nebst der darüber befindlichen Masse, zu setzen.

Nach den in §. 25 enthaltenen Bemerkungen über die Art und Weise des Erddruckes hat man hier die Cohäsion der Erde ganz und gar zu vernachlässigen und man darf, wenn man eine beliebige Horizontalfuge $m\mu$ des Widerlagers betrachtet, der Einfachheit wegen und mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß die senkrecht über dieser Fuge befindliche Mauer- und Erdmasse einen zusammenhängenden Körper von rechteckigem Querschnitt bilde, und daß demzufolge der äußere Erddruck gegen eine vertikale Fläche gerichtet, also horizontal sei.

Da hier nicht der Ort ist, die vollständige Theorie des Erddruckes wiederzugeben, so mag nur daran erinnert werden, daß im

Allgemeinen, wenn man die Cohäsion der Erde vernachlässigt, der Normaldruck einer Erdmasse von der Höhe H gegen eine gleich h he senkrechte Wand gleich

$$\frac{1}{2} \varrho \,.\, H^2 \,.\, tg^2 \left(\frac{1}{2} \Psi\right)$$

ist, und daß der Hebelarm dieses Druckes in Bezug auf den Fußpunkt jeder Wand gleich $\frac{1}{3}\, H$ zu setzen ist. Der untere Winkel im Prisma des größten Druckes ist nämlich für diesen Fall $= \frac{1}{2}\, \Psi$.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes M der Resultante der Pressungen in der beliebigen Horizontalfuge $m\mu$ hat man die Summe der Momente vom Gewichte $\varrho \,.\, \eta_q \,.\, (H_3 - Z)$ der über jener Fuge befindlichen Masse des Widerlagers, ferner von den beiden im Punkte M_n angreifenden Kräfte P_0 und P_v, und endlich vom äußeren Erddruck

$$\frac{1}{2} \varrho \,.\, (H_3 - Z)^2 \,.\, tg^2 \left(\frac{1}{2} \Psi\right),$$

dessen Hebelarm in Bezug auf jenen Punkt M gleich $\frac{1}{3}\,(H_3 - Z)$ ist, gleich 0 zu setzen, also:

$$\left(\frac{1}{2}\eta_q - Y_q\right) . \varrho . \eta_q . (H_3 - Z) - Y_q . P_v + P_0 . (Z_n - Z) -$$
$$- \frac{1}{3}(H_3 - Z) . \frac{1}{2}\varrho . (H_3 - Z)^2 . tg^2 \left(\frac{1}{2}\Psi\right) = 0,$$

oder wenn man diese Gleichung auf Y_q reducirt:

$$(31.)\quad Y_q = \frac{\frac{1}{2}\varrho . \eta_q{}^2 . (H_3 - Z) + P_0 . (Z_n - Z) - \frac{1}{6}\varrho . (H_3 - Z)^3 . tg^2\left(\frac{1}{2}\Psi\right)}{\varrho . \eta_q . (H_3 - Z) + P_v}$$

Wenn in der betrachteten Horizontalfuge $m\mu$ die Mittellinie des Druckes sich der inneren Fläche des Widerlagers am meisten nähert (wie es bei einer Brücke von nicht zu großer Spannweite entweder für das ganze Widerlager oder doch wenigstens für den größten Theil desselben der Fall sein wird), so hat man, um die Bedingung einzuführen, daß das Widerlager an keiner Stelle überflüssig stark gemacht werden solle, anzunehmen, daß in der Fuge $m\mu$ die Pressung pro Flächeneinheit an der inneren Kante m gleich P' sein müsse. Demnach wird man nach Formel (22), wenn hier nur der auf die Fläche $m\mu$ ausgeübte Vertikaldruck $\varrho . \eta_q . (H_3 - Z) + P_v$ berücksichtigt wird, zu setzen haben:

$$Y_q = \frac{2}{3}\eta_q - \frac{1}{6}\,\frac{P'}{\varrho . \eta_q . (H_3 - Z) + P_v} . \eta_q{}^2.$$

Wenn man hierin den Werth von Y_q aus Formel (31) substituirt, und dann beide Seiten der Gleichung mit dem Ausdruck $6\,[\varrho . \eta_q . (H_3 - Z) + P_v]$ multiplicirt, so erhält man:

$$3\varrho . \eta_q{}^2 . (H_3 - Z) + 6 P_0 . (Z_n - Z) - \varrho . (H_3 - Z)^3 . tg^2\left(\frac{1}{2}\Psi\right) =$$
$$= 4\varrho . \eta_q{}^2 . (H_3 - Z) + 4 P_v . \eta_q - P' . \eta_q{}^2,$$

oder nach Potenzen von η_q geordnet:

$$\eta_q{}^2 . [P' - \varrho . (H_3 - Z)] - 4 P_v . \eta_q = \varrho . (H_3 - Z)^3 . tg^2\left(\frac{1}{2}\Psi\right) -$$
$$- 6 P_0 . (Z_n - Z).$$

Die Auflösung dieser einfachen quadratischen Gleichung für η_q giebt:

$$(32.)\quad \eta_q = \frac{2P_v}{P' - \varrho.(H_3 - Z)} +$$

$$+\sqrt{\left(\frac{2P_v}{P' - \varrho.(H_3 - Z)}\right)^2 + \frac{\varrho.(H_3 - Z)^3.tg^2(1/2\Psi) - 6P_0.(Z_n - Z)}{P' - (H_3 - Z).\varrho}}$$

Man sieht leicht, daß das Vorzeichen der Wurzel in dieser Gleichung im Allgemeinen positiv sein muß, damit man bei hohen Widerlagern immer einen positiven Werth für η_q nach der Gleichung bekomme. *)

Indem man in Formel (32) $Z = 0$ setzt, erhält man die nöthige Stärke des Widerlagers an seiner Basis:

$$(33.)\quad E = \frac{2P_v}{P' - \varrho.H_3} +$$

$$+\sqrt{\left(\frac{2P_v}{P' - \varrho.H_3}\right)^2 + \frac{\varrho.H_3^3.tg^2(1/2\Psi) - 6P_0.Z_n}{P.\varrho.H_3}}.$$

Wenn der äußere Erddruck überhaupt den Horizontalschub des Gewölbes überwiegt, so liegt die Möglichkeit vor, daß das Widerlager auf irgend einer Horizontalfuge nach innen gleiten kann, und zwar wird ein solches Gleiten am leichtesten an der Basis des Widerlagers, wo der Erddruck am stärksten ist, erfolgen können. Wenn aber dieses Gleiten in Wirklichkeit nicht eintreten soll, so muß die folgende Gleichung stattfinden:

$$(34.)\quad f > \frac{1/2\,\varrho.H_3^2.tg^2(1/2\Psi) - P_0}{\varrho.E.H_4 + P_v}.$$

§. 28.

Um die in den beiden vorigen Paragraphen enthaltenen Formeln zur Construction eines Widerlagers wirklich anwenden zu können, hat man das Folgende zu beachten:

Wenn man die Sache ganz allgemein behandeln und vollkommen sicher gehen will, so berechnet man erst unter der Voraussetzung, daß nur der Gewölbschub berücksichtigt werde, nach Formel (26) die Ordinaten des Außenbogens für so viele verschiedene Abscissen, daß man die Curve danach zeichnen kann; jedoch ist dabei zu bemerken, daß diese Rechnung nur für den unteren Theil des Widerlagers bis zur Höhe Z' ausführbar ist, indem man den Werth von Z' aus Formel (28) bestimmt. Dann construirt man auf ähnliche Weise nach Glei-

*) Die Gleichung (32) ist in manchen Fällen für einen gewissen Theil des Widerlagers nicht gültig, wenn nämlich der Gewölbschub den Erddruck an dieser Stelle überwiegt, so daß die Mittellinie des Druckes daselbst über die Mitte der Horizontalfugen hinausgeht und sich dem Außenbogen nähert. Die Ableitung einer besonderen Gleichung dafür ist indessen für die Anwendung ohne Wichtigkeit.

chung (32) den Außenbogen des Widerlagers unter der Voraussetzung, daß der Erddruck und der Gewölbschub berücksichtigt werden; man erkennt dabei leicht, an welcher Stelle des Widerlagers die Gleichung (32) nicht gültig ist, indem man dafür durch Rechnung imaginäre Werthe für η_q erhält.

Diese Berechnungen der verschiedenen Ordinaten für eine hinreichende Anzahl von Abscissen lassen sich, obwohl die Gleichungen (26) und (32) eine ziemlich weitläufige Form haben, doch mit leichter Mühe vornehmen, weil sich dieselben Operationen dabei fortwährend wiederholen und man für jede einzelne Berechnung nur wenig neue Logarithmen aufzuschlagen braucht. Es ist hier noch zu bemerken, daß wenn $H_3 = \frac{P'}{\varrho}$ ist, die Stärke E des Widerlagers an der Basis nach beiden Formeln unendlich groß werden müßte; in diesem Fall ist nämlich H_3 gleich der sogenannten Festigkeitshöhe des Steinmateriales, d. h. gleich der äußersten Höhe, welche man einem senkrecht stehenden Prisma des Materiales noch geben darf, wenn dasselbe nicht durch sein eigenes Gewicht zerdrückt werden soll.

Wenn man unter beiden möglichen Voraussetzungen die Werthe der verschiedenen Ordinaten des Außenbogens nach Formel (26) und (32) berechnet hat, so wird man, um ein stabiles Widerlager zu bekommen, natürlicherweise für jede Abscisse von den beiden verschiedenen, dafür berechneten Werthen der Ordinate den größten in Wirklichkeit anzunehmen haben, für den Angriffspunkt des Gewölbschubes, d. h. für die Abscisse Z_n, ist die Formel (32) allein anwendbar; diese Formel nimmt dann die folgende einfachere Gestalt an:

$$(35.)\quad \eta_{qn} = \frac{2P_v}{P' - \varrho\cdot(H_3 - Z_n)} + \sqrt{\left(\frac{2P_v}{P' - \varrho\cdot(H_3 - Z_n)}\right)^2 + \frac{\varrho\cdot(H_3 - Z_n)^3 \cdot tg^2(\tfrac{1}{2}\Psi)}{P' - \varrho\cdot(H_3 - Z_n)}}.$$

Zur Berechnung der Stärke des Widerlagers an seiner Basis nehmen bekanntlich die Formeln (26) und (32) die einfachere Gestalt der Gleichungen (29) und (33) an. Im Allgemeinen wird man bei Gewölben von nicht sehr großer Spannweite und mit hohen Widerlagern, also namentlich bei den Viaducten, nach Gleichung (33) den größten Werth für E finden, während man denselben bei sehr weiten Gewölben mit verhältnißmäßig niedrigen Widerlagern aus Gleichung (29) bekommt. Da sich aber die Grenzen, innerhalb deren die eine oder die andere Formel das größte Resultat giebt, nicht wohl bestimmt angeben lassen, so wird man der Sicherheit wegen am besten in allen Fällen nach beiden Formeln rechnen, und aus den beiden danach berechneten Werthen von E den größten auswählen.

Für Anwendungen auf die Praxis genügt es immer vollständig, wenn man nur die Stärke des Widerlagers am oberen Ende (d. h. bei dem Angriffspunkte M_n des Gewölbschubes) nach Formel (35), und an der Basis nach den Gleichungen (29) und (33) bestimmt;

dazwischen pflegt man den Außenbogen des Widerlagers im Durchschnitt geradlinig zu machen, jedoch so, daß er aus lauter gleichen treppenförmigen Absätzen besteht, wie in Fig. 1, Tafel I. gezeichnet ist. Hierdurch bekommt man für jede Horizontalfuge einen gewissen Ueberschuß an Stabilität, weil die beiden Curven für den Außenbogen, welche sich nach Gleichung (26) oder (32) construiren lassen, beide fast auf ihre ganze Länge convex gegen die Abscissenachse sind, und weil demnach alle nach diesen Gleichungen berechneten Werthe der Ordinaten des Außenbogens kleiner als bei der in der Praxis gebräuchlichen einfachen Zeichnung des Außenbogens als gerade Linie sein müssen.

Bei Brückengewölben, worüber eine Erdschüttung liegt, pflegt man durch den höchsten Punkt vom Außenbogen des Widerlagers, d. h. welcher in der, durch den Punkt M_n gehenden Horizontalfuge liegt, eine Tangente an den Außenbogen des Gewölbes zu führen und damit das Mauerwerk des Widerlagers oben abzuschließen.

§. 29.

Die in den vorigen drei Paragraphen enthaltenen Formeln sind zur Berechnung eines Widerlagers größtentheils nur unter der gestellten Voraussetzung, daß über und hinter dem Widerlager eine Erdschüttung mit horizontaler Oberfläche liegt, brauchbar.

Die beiden Gleichungen (29) und (33) zur Bestimmung der erforderlichen Stärke des Widerlagers an seiner Basis bleiben auch für den Fall gültig, wenn über dem Widerlager keine Erde liegt, sondern das Mauerwerk des Widerlagers in voller Stärke bis zur horizontalen Oberfläche der Gewölb-Abdeckung aufgeführt ist. Wie man leicht sieht, so muß in diesem Fall die schwächste Stelle des Widerlagers an seiner Basis liegen, und es genügt also, die Stärke desselben an der Basis zu bestimmen. Die Gleichung (29) ist nun unter der Voraussetzung anzuwenden, daß entweder hinter dem Widerlager gar keine Erdmasse liegt, oder daß vorläufig nicht der Seitendruck dieser Masse, sondern nur der Gewölbeschub berücksichtigt werden soll. Wenn man dagegen diese beiden Kräfte zusammen in Betracht ziehen will, so muß man nach der Gleichung (33) rechnen.

Mitunter pflegt man der Kostenersparniß wegen, vorzüglich bei großen Brücken und Viaducten, das Mauerwerk der Widerlager nicht als eine gleichförmige Masse von überall gleichem Querschnitt herzustellen, sondern durch einzelne Strebepfeiler an der Außenseite zu verstärken, oder im Innern des Mauerwerks ausgewölbte hohle Räume anzubringen, um die ganze Dicke des Widerlagers recht groß annehmen zu können. Wenn man nun in diesem Fall die Rechnung zur Bestimmung der nöthigen Mauerstärken an verschiedenen Stellen des Widerlagers mit mathematischer Genauigkeit führen wollte, so würde man sich in unendliche Schwierigkeiten und Weitläufigkeiten verwickeln;

es muß daher für diesen Fall am einfachsten und zweckmäßigsten erscheinen, das gesammte Mauerwerk als eine gleichmäßige Masse von einem durchschnittlichen gleichbleibenden Querschnitt und einer gewissen durchschnittlichen Dichtigkeit ϱ' anzusehen. Dann kann man auch hier wieder die Formeln (29) und (33) zur Berechnung der erforderlichen durchschnittlichen Stärke des Widerlagers an seiner Basis benutzen, wenn man nur überall an den entsprechenden Stellen ϱ' anstatt ϱ in diese Gleichungen substituirt. Eben so würde man für die rückwirkende Festigkeit des Materiales einen Durchschnittswerth P_2 anstatt P' einführen müssen.

Wenn man sich vollständig von der Stabilität eines Widerlagers überzeugen will, so muß man eigentlich auch noch nach Formel (30) und (34) untersuchen, ob weder am oberen noch am unteren Ende des Widerlagers ein Gleiten des Mauerwerks in den Horizontalfugen eintreten kann. Ein solches Gleiten ist indessen nur bei solchen Gewölben, deren Pfeilhöhe im Verhältniß zur Spannweite sehr gering ist, wirklich zu befürchten, also namentlich bei flachen Segmentbögen; dagegen kann bei allen nicht zu sehr gedrückten Bögen ein Gleiten in den Widerlagern nicht wohl vorkommen, wenn nur übrigens das Mauerwerk so stark gemacht worden ist, daß darin die Pressung pro Flächeneinheit an keiner Stelle das vorgeschriebene Maß P' überschreitet. Man braucht also, wenn man eine Anwendung der Theorie auf die Praxis machen will, nur in wenigen besondern Fällen, und zwar dann nach Formel (30), die Stabilität eines Widerlagers in Bezug auf Gleiten zu untersuchen.

§. 30.

Es kommt häufig vor, daß zwei Bögen von ungleichen Dimensionen sich auf denselben Mittelpfeiler stützen, wie dieses beispielsweise in Fig. 4, Tafel I. gezeichnet ist. Bei der Betrachtung eines solchen Falles möge der Einfachheit wegen angenommen werden, daß die beiden Seitenflächen des Pfeilers vertikal seien, und daß der Pfeiler in gleichbleibender Stärke bis zur horizontalen Oberfläche der Gewölb-Abdeckung aufgeführt sei, wobei die obere Masse dieses Pfeilers entweder aus Mauerwerk oder aus Erdschüttung bestehen kann.

Es bezeichne:

E_1, die konstante Dicke des Pfeilers;

H_3, die ganze Höhe desselben;

P_0 und P_v, die horizontale und vertikale Componente vom Schub des einen Gewölbes;

Z_n, die Höhe des Angriffspunktes M_n dieser beiden Kräfte über der Basis des Pfeilers;

p_0, p_v und z_n, dieselben Größen für das andere Gewölbe;

M_q, den Angriffspunkt der Resultante der Pressungen in der Basis AB des Pfeilers;

δ, den Abstand dieses Punktes von der nächstliegenden Kante B der Basis.

Wenn das Moment vom Schub des ersteren Gewölbes in Bezug auf die Mitte der Basis $A\,B$ größer als dasjenige vom Schub des anderen Gewölbes ist, so wird der Angriffspunkt M_q der Resultanten der Pressungen in der Fuge $A\,B$ näher bei der Kante B als bei A liegen. Da die Pressung im Pfeiler von oben nach unten fortwährend wächst, aber die Stärke des Pfeilers nach unten hin gar nicht zunimmt, so liegt die verhältnißmäßig schwächste Stelle des Pfeilers in dessen Basis und es genügt also, für die Horizontalfuge $A\,B$ an der Basis die erforderliche gleichbleibende Stärke E_1 des Pfeilers zu bestimmen.

Die Resultante der Pressungen, welche im Punkte M_q angreift, setzt sich aus den äußeren Kräften P_0, P_v, p_0, p_v und aus dem Gewicht $\varrho \,.\, E_1 \,.\, H_3$, welches in der Mitte der Basis $A\,B$ als angreifend angesehen werden muß, zusammen. Die Summe der Momente dieser verschiedenen Kräfte in Bezug auf den Punkt M_q ist gleich 0 zu setzen, nämlich:

$$\varrho \,.\, H_3 \,.\, E_1 \,.\left(\frac{E_1}{2} - \delta\right) + P_v \,.\, (E_1 - \delta) + p_0 \,.\, Z_0 -$$
$$- p_v \,.\, \delta - P_0 \,.\, Z_0 = 0,$$

oder auf δ reducirt:

$$(36). \quad \delta = \frac{{}^1/_2\, \varrho \,.\, E_1^2 \,.\, H_3 \,. + P_v \,.\, E_1 + p_0 \,.\, z_0 - P_0 \,.\, Z_0}{P_v + p_v + \varrho \,.\, H_3 \,.\, E_1}.$$

Wenn nun der Pfeiler an seiner Basis nicht stärker gemacht werden soll, als gerade nöthig ist, d. h. wenn die Pressung pro Flächeneinheit an der am meisten gedrückten Kante B der Basis das erlaubte Maß P' erreichen soll, so hat man, da hier nur der in M_q angreifende Vertikaldruck $P_v + p_v + \varrho \,.\, E_1 \,.\, H_3$ in Frage kommt, nach Formel (22) zu setzen:

$$\delta = {}^2/_3\, E_1 - {}^1/_6\, \frac{P'}{P_v + p_v + \varrho \,.\, E_1 \,.\, H_3} \,.\, E_1^2.$$

Wenn man nun diesen Werth für δ in die obige Gleichung (36) substituirt und dann beide Seiten der Gleichung mit dem Ausdruck $6 \,.\, (P_v + p_v + \varrho \,.\, E_1 \,.\, H_3)$ multiplicirt, so erhält man:

$$4\, E_1 \,.\, (P_v + p_v) + 4\, \varrho \,.\, H_3 \,.\, E_1^2 - P' \,.\, E_1^2 = 3\, \varrho \,.\, H_3 \,.\, E_1^2 +$$
$$+ 6\, E_1 \,.\, P_v + 6\, p_0 \,.\, Z_0 - 6\, P_0 \,.\, Z_0,$$

oder nach Potenzen von E_1 geordnet und zusammengezogen:

$$E_1^2 \,.\, (P' - \varrho \,.\, H_3) - E_1 \,.\, (4\, p_v - 2\, P_v) = 6\, (P_0 \,.\, Z_0 - p_0 \,.\, z_0).$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung für E_1 ergiebt

$$(37).\quad E_1 = + \frac{2p_v - P_v}{P' - \varrho . H_3} + \sqrt{\left(\frac{2p_v - P_v}{P' - \varrho . H_3}\right)^2 + 6\,\frac{P_0 . Z_0 - p_0 . z_0}{P' - \varrho . H_3}}.$$

Daß das Vorzeichen der Wurzel in dieser Gleichung positiv genommen werden mußte, ist wohl einleuchtend, weil sonst der Werth von E_1 nach der Gleichung leicht negativ werden könnte *).

Kapitel IV.

§. 31.

Diejenigen Formen des Innenbogens, welche in der Praxis am gewöhnlichsten vorkommen, sind: Der volle Halbkreis-Bogen, der Kreissegment-Bogen, der elliptische Bogen und die sogenannten Korbbögen, die aus verschiedenen Kreisbögen von ungleichen Radien zusammengesetzt sind. Spitzbögen werden in der jetzigen Zeit, namentlich bei größeren Gewölben, nur selten ausgeführt und brauchen deshalb in den Untersuchungen dieses Kapitels nicht mit berücksichtigt zu werden; auch ist bereits in §. 20 gezeigt worden, daß unsere in den beiden ersten Kapiteln aufgestellte Gewölbetheorie, wo bei Ableitung der Gleichung für die Mittellinie des Druckes der Einfachheit wegen die sämmtlichen Gewölbfugen als vertikal angenommen wurden, bei Spitzbögen sich am weitesten von der Wahrheit entfernt und dafür nicht mehr als brauchbar anzusehen ist.

In den folgenden Untersuchungen werden wir immer voraussetzen, daß über dem Gewölbe eine Abdeckung von Mauerwerk oder Erdschüttung, deren Dichtigkeit gleich derjenigen der Gewölbsteine angenommen werden darf, liege. Die Höhe der horizontalen Oberfläche dieser Abdeckung über dem Gewölbanfang mag durch H bezeichnet werden. Nach §. 12 hieß die allgemeine Gleichung der Mittellinie des Druckes im Gewölbe unter dieser Voraussetzung:

$$P_0 . (Y_0 - Y) = \varrho . \int\int (H - y) . dx^2.$$

Es kommt nun darauf an, diese Gleichung auf die verschiedenen gebräuchlichsten Gewölbformen anzuwenden und dieselbe integrirbar zu machen, indem man für jeden speziellen vorliegenden Fall die betreffenden Werthe von y und dx hinein substituirt.

---

*) Carvallo betrachtet den Fall, wenn zwei unsymmetrische Bögen sich auf denselben Mittelpfeiler stützen, auf ähnliche Weise wie oben im §. 30; er macht aber bei Ableitung einer Gleichung zur Bestimmung der erforderlichen Pfeilerstärke E_1 einige bedeutende Rechnenfehler.

§. 32.

Es sei zunächst die Gleichung der Mittellinie des Druckes für einen Halbkreisbogen mit horizontaler Abdeckung zu entwickeln.

Da der Mittelpunkt des Kreises für diesen Fall mit dem angenommenen Coordinaten-Ursprung zusammenfällt, so muß die Gleichung des halbkreisförmigen Innenbogens bekanntlich heißen:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

oder wenn man durch α den Winkel bezeichnet, welchen der nach einem beliebigen Punkte des Innenbogens gezogene Radius mit der vertikalen, durch den Gewölbscheitel gehenden Ordinatenachse einschließt, so ist:

$$y = r \,.\, cos\,\alpha.$$
$$x = r \,.\, sin\,\alpha.$$
$$dx = r \,.\, cos\,\alpha \,.\, d\alpha.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die allgemeine Gleichung für die Mittellinie des Druckes bekommt man:

$$P_0 \,.\, (Y_0 - Y) = \varrho \,.\, \int dx \,.\, \int (H - r \,.\, cos\;\alpha) \,.\, r \,.\, cos\;\alpha \,.\, d\alpha,$$

oder einmal differentiirt:

$$-P_0 \,.\, \left(\frac{dY}{dx}\right) = \varrho \,.\, \int_0^\alpha (H \,.\, r \,.\, cos\;\alpha - r^2 \,.\, cos^2\;\alpha) \,.\, d\alpha.$$

Um die, auf der rechten Seite dieser Gleichung angedeutete Integration wirklich ausführen zu können, muß man die bekannten Integralformeln $\int cos\;\alpha \,.\, d\alpha = sin\;\alpha$ und $\int cos^2\;\alpha \,.\, d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{sin\;\alpha \,.\, cos\;\alpha}{2}$ zu Hülfe nehmen; demnach wird:

$$(38). \quad -P_0 \,.\, \left(\frac{dY}{dx}\right) = \varrho \,.\, r^2 \,.\, \left(\frac{H}{r} \,.\, sin\;\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{sin\;\alpha \,.\, cos\;\alpha}{2}\right)$$

Der Ausdruck $-P_0 \,.\, \left(\frac{dY}{dx}\right)$ ist nichts Anderes als die vertikale Componente der Resultante der Pressungen für diejenige Vertikalfuge, welche man sich durch den betrachteten Punkt des Innenbogens gelegt denkt, oder als das Gewicht von der, zwischen dieser Vertikalfuge und der Scheitelfuge des Gewölbes enthaltenen Masse. Für die Vertikalfuge am Gewölbanfang, in Bezug worauf alle Coordinaten mit dem Index n bezeichnet werden mögen, ist also $-P_0 \,.\, \left(\frac{dY}{dx}\right)_n$ das Gewicht des halben Gewölbes nebst der vertikal darüber befindlichen Masse der Abdeckung, nämlich dasselbe, was im vorigen Kapitel der Abkürzung wegen durch P_v bezeichnet wurde.

Für den Gewölbanfang hat man in Gleichung (38) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, und es wird demnach:

$$(39).\quad P_v = -P_0 \cdot \left(\frac{dY}{dx}\right)_n = \varrho \cdot r^2 \cdot \left(\frac{H}{r} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung (38) mit $dx = r \cdot cos\,\alpha \cdot d\alpha$ multiplicirt und dann zwischen den entsprechenden Grenzen integrirt, so bekommt man:

$$P_0 \cdot \int_{y_0}^{y} - dY = \varrho \cdot r^3 \cdot \int_0^{\alpha} \left(\frac{H}{r} \cdot sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha - \frac{\alpha}{2} \cdot cos\,\alpha - \frac{sin\,\alpha \cdot cos^2\,\alpha}{2}\right) d\alpha.$$

Bei Ausführung der Integration auf der rechten Seite dieser Gleichung muß man die Integralformeln:

$$\int sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot d\alpha = \frac{sin^2\,\alpha}{2},$$

$$\int \alpha \cdot cos\,\alpha \cdot d\alpha = \alpha \cdot sin\,\alpha + cos\,\alpha,$$

$$\int - sin\,\alpha \cdot cos^2\,\alpha \cdot d\alpha = \tfrac{1}{3}\, cos^3\,\alpha$$

zu Hülfe nehmen, und erhält dann, wenn man die Werthe der vorgeschriebenen Grenzen in das vollzogene Integral substituirt:

$$P_0 \cdot (Y_0 - Y) = \varrho \cdot r^3 \cdot \left[\frac{H}{r} \cdot \frac{sin^2\,\alpha}{2} - \frac{\alpha \cdot sin\,\alpha}{2} - \frac{cos\,\alpha}{2} + \frac{cos^3\alpha}{6}\right] - \varrho \cdot r^3 \cdot \left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\right],$$

oder zusammengezogen:

$$(40).\quad P_0 \cdot (Y_0 - Y) = \varrho \cdot r^3 \cdot \left(\frac{H}{r} \cdot \frac{sin^2\,\alpha}{2} - \frac{\alpha \cdot sin\,\alpha}{2} - \frac{cos\,\alpha}{2} + \frac{cos^3\,\alpha}{6} + \tfrac{1}{3}\right).$$

Dieses ist die Gleichung der Mittellinie des Druckes für ein halbkreisförmiges Gewölbe. Mit Hülfe derselben und der, im zweiten Kapitel entwickelten 8 Bedingungsgleichungen für die Stabilität eines Gewölbes ist es möglich, alle zur Construction eines stabilen Gewölbes, dessen Innenbogen einen Halbkreis bildet, erforderlichen Elemente zu berechnen. Die genaue Ausführung der dabei vorkommenden Rechnungen werden wir in den beiden letzten Kapiteln kennen lernen.

§. 33.

Der Innenbogen bilde einen Kreissegmentbogen und es bezeichne:

h, die Höhe der durch den Gewölbanfang gehenden Abscissenachse über dem Mittelpunkte des Kreises.

α_n, den Winkel, welchen der nach dem Bogenanfang gezogene Radius mit der Vertikalen einschließt.

Die Beziehungen unter den Coordinaten des Kreissegmentbogens findet man ohne Weiteres wie folgt:

$$y = r \,.\, cos\, \alpha - h$$
$$x = r \,.\, sin\, \alpha.$$
$$dx = r \,.\, cos\, \alpha \,.\, d\alpha.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die allgemeine Gleichung und Ausführung der Integrationen, wobei die Rechnung auf ganz dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen geführt wird und keine weiteren Schwierigkeiten bietet, findet man dann die folgenden drei Gleichungen:

$$(41).\quad -P_0 \cdot \left(\frac{dY}{dx}\right) = \varrho \,.\, r^2 \,.\left(\frac{H+h}{r} \,.\, sin\, \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha}{2}\right)$$

$$(42).\quad P_v = - P_0 \,.\left(\frac{dY}{dx}\right)_n = \varrho \,.\, r^2 \,.\left(\frac{H+h}{r} \,.\, sin\, \alpha_n - \frac{\alpha_n}{2} - \frac{sin\, \alpha_n \,.\, cos\, \alpha_n}{2}\right).$$

$$(43).\quad P_0 \cdot (Y_0 - Y) = \varrho \,.\, r^3 \,.\left(\frac{H+h}{r} \cdot \frac{sin^2\, \alpha}{2} - \frac{\alpha\, sin\, \alpha}{2} - \frac{cos\, \alpha}{2} + \frac{cos^3\, \alpha}{6} + \tfrac{1}{3}\right).$$

§. 34.

Es bilde der Innenbogen eine halbe Ellipse, deren große Achse mit der horizontalen Abscissenachse, und deren kleine Achse mit der vertikalen Ordinatenachse zusammenfällt. Es bezeichne:

a, die halbe große Achse der Ellipse;
b, die halbe kleine Achse derselben.

Wenn man die Ellipse mit einem Halbkreise vergleicht, welcher über ihrer großen Achse als dem Durchmesser beschrieben ist (wie solches beispielsweise in Fig. 3, Taf. I. dargestellt ist), so müssen nach einem bekannten Satze der Geometrie für eine und dieselbe Abscisse die beiden zugehörigen Ordinaten der Ellipse und des Kreises immer in dem constanten Verhältnisse $\frac{b}{a}$ zu einander stehen. Wenn nun für einen beliebigen Punkt des genannten Kreises der von dem zugehörigen Radius mit der Vertikalen eingeschlossene Winkel durch α bezeichnet wird, so ist die Ordinate dieses Punktes gleich $a \,.\, cos\, \alpha$, und folglich die Ordinate des senkrecht darunter liegenden Punktes der Ellipse gleich $\frac{b}{a} \,.\, a \,.\, cos\, \alpha = b \,.\, cos\, \alpha$. Indem man also den Winkel α immer auf die Radien des Kreises vom Halbmesser *a*, womit

man die betrachtete Ellipse vergleicht, zu beziehen hat, so bekommt man für die Coordinaten der Ellipse die folgenden Ausdrücke:

$$y = b \,.\, cos\, \alpha.$$
$$x = a \,.\, sin\, \alpha.$$
$$dx = a \,.\, cos\, \alpha \,.\, d\alpha.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die allgemeine Gleichung der Mittellinie des Druckes und durch Ausführung der Integrationen auf ganz dieselbe Weise, wie in §. 32 geschehen, bekommt man dann:

$$(44).\quad -P_0 . \left(\frac{dY}{dx}\right) = \varrho \,.\, a \,.\, b \,.\left(\frac{H}{b} \,.\, sin\, \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha}{2}\right).$$

$$(45).\quad -P_0 . \left(\frac{dY}{dx}\right)_n = \varrho \,.\, a \,.\, b \,.\left(\frac{H}{b} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$(46).\quad P_0 . (Y_0 - Y) = \varrho \,.\, a^2 . b \,.\left(\frac{H}{b} \,.\, \frac{sin^2 \alpha}{2} - \frac{\alpha \,.\, sin\, \alpha}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{cos^3 \alpha}{6} + 1/3 - \frac{cos\, \alpha}{2}\right).$$

§. 35.

Wenn der Innenbogen einen Korbbogen, also eine discontinuirliche Curve bildet, so muß die Mittellinie des Druckes ebenfalls eine discontinuirliche Curve werden; sie nimmt dann nämlich für jede einzelne der Curven, woraus der Innenbogen besteht, eine besondere Gestalt an.

Es seien $f_1\,(x)$, $f_2\,(x)$, $f_3\,(x)$ ...... die Gleichungen der verschiedenen Curven des Innenbogens, woraus man den Werth der Ordinate y nur zwischen den bestimmten Grenzen 0 und x_1, oder x_1 und x_2, oder x_2 und x_3 ...... berechnen darf. Man findet nun als Gleichungen für den ersten Theil der Mittellinie des Druckes, welcher der ersten Curve des Innenbogens entspricht:

$$P_0 \,.\, (Y_0 - Y) = \varrho \,.\int_0^x dx \,.\int_0^x (H - f_1[x]) \,.\, dx.$$

$$- P \,.\left(\frac{dY}{dx}\right)_1 = \varrho \,.\int_0^{x_1} (H - f_1\,[x]) \,.\, dx.$$

Für den zweiten Theil der Mittellinie den Druckes erhält man ferner:

$$P_0 . \left[\left(\frac{dY}{dx}\right)_1 . (x - x_1) + Y_1 - Y\right] =$$
$$= \varrho \,.\int_{x_1}^x dx \,.\int_{x_1}^x (H - f_2[x]) \,.\, dx.$$

$$P_0 . \left[\left(\frac{dY}{dx}\right)_1 - \left(\frac{dY}{dx}\right)_2\right] = \varrho \,.\int_{x_1}^{x_2} (H - f_2\,[x]) \,.\, dx.$$

Für den dritten Theil derselben:

$$P_0 \cdot \left[\left(\frac{dY}{dx}\right)_2 \cdot (x - x_2) + Y_2 - Y\right] =$$
$$= \varrho \cdot \int_{x_2}^{x} dx \cdot \int_{x_2}^{x} (H - f_3[x]) \cdot dx.$$

$$P_0 \cdot \left[\left(\frac{dY}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dY}{dx}\right)_3\right] = \varrho \cdot \int_{x_2}^{x_3} (H - f_3[x]) \cdot dx.$$

. . . .

Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sind, wenn der Korbbogen aus verschiedenen Kreisbögen besteht, alle von der Form $c + \sqrt{r^2 - (x - d)^2}$, nämlich die Gleichungen dieser Kreise; es reduciren sich dann die Integrationen, die in den oben abgeleiteten Gleichungen für die verschiedenen Theile der Mittellinie des Druckes vorgeschrieben sind, auf dieselben, welche bereits in §. 32 vorkamen. Es sind also die Rechnungen, welche zur theoretischen Betrachtung eines Korbbogens erforderlich sind, nur weitläufiger, aber nicht schwieriger als bei den früher betrachteten einfacheren Gewölbformen.

§. 36.

Bei der Ableitung von allen den im Vorstehenden entwickelten Gleichungen und überhaupt bei allen bisherigen Untersuchungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß das betrachtete Gewölbe ein cylindrisches oder Tonnengewölbe, worin die Lagerflächen der Gewölbsteine parallele Ebenen zur Achse des Gewölbes bilden, sei; dann genügt es nämlich jedenfalls, nur den Querschnitt des Gewölbes zu betrachten, wenn man dessen Stabilität untersuchen will. Die bisher gewonnenen Resultate lassen sich jedoch mehr oder weniger auch auf verschiedene andere, in der Architectur oder beim Brückenbau gebräuchliche Gewölbformen anwenden, wenn man es nicht verschmäht, nach einer solchen Annäherungsmethode zu rechnen und demgemäß zu construiren, wodurch diese Gewölbe immer einen kleinen Ueberschuß an Stabilität erhalten.

Bei den Kuppelgewölben vernachlässigt man am besten ganz den Zusammenhang des Gewölbes in horizontaler Richtung und denkt sich dasselbe durch vertikale Meridian-Ebenen in einzelne Streifen zerschnitten, deren Breite im Gewölbscheitel gleich 0 ist, aber von da nach dem Gewölbanfang zu fortwährend wächst. Man kann nun einen solchen durch ein gewöhnliches Tonnengewölbe von ungleichmäßiger Dichtigkeit sich ersetzt denken, indem diese Dichtigkeit vom Scheitel, wo sie gleich 0 ist, an abwärts stets wachsen würde. Eben so würde die rückwirkende Festigkeit des Materiales als in gleichem Verhältniß zu

dessen Dichtigkeit stehend anzusehen sein. Von der Bedingung, daß die Pressung **pro** Flächeneinheit im Scheitel dieses Tonnengewölbes ein gewisses Maß P' nicht überschreiten dürfe, muß man dann natürlicherweise absehen, weil in Wirklichkeit gar keine Pressung im Scheitel eines Kuppelgewölbes stattfindet, sondern weil die Ringe, welche von den Gewölbsteinen in der Nähe des Scheitels gebildet werden, gewölbartig wirken und schon für sich allein den Horizontalpressungen, welche von den unteren Gewölbtheilen dagegen ausgeübt werden, hinreichenden Widerstand entgegenzusetzen im Stande sind, ohne dieselben weiter nach oben hin fortzupflanzen. Man kann daher im Scheitel eines Kuppelgewölbes ohne Gefahr für die Stabilität ein kreisförmiges Loch anbringen.

Wenn man bei der Untersuchung eines Kuppelgewölbes einigermaßen methodisch zu Werke gehen will, so hat man für einen Meridianstreifen desselben nach unseren allgemeinen Formeln die Lage der Bruchfuge zu bestimmen, danach die Größe des Horizontalschubes im Gewölbscheitel zu ermitteln und dann die Mittellinie des Druckes zu zeichnen. Hierbei zeigt sich immer, daß die Bruchfuge bei einem Kuppelgewölbe bedeutend tiefer liegt als bei einem Tonnengewölbe von demselben Querschnitt. Für den unterhalb der Bruchfuge gelegenen Gewölbtheil muß man nun untersuchen, ob die Pressung **pro** Flächeneinheit an keiner Stelle des Gewölbstreifens das vorgeschriebene Maß der rückwirkenden Festigkeit überschreiten werde. Es ist nämlich der obere Theil des Kuppelgewölbes, welcher oberhalb der Bruchfugen in den einzelnen vertikalen Gewölbstreifen liegt, vor dem Einsturz nach innen zu schon durch die Horizontalspannung in den einzelnen Horizontalringen, woraus er besteht, gesichert; bei dem untereren Gewölbtheil hingegen, wofür der Einsturz nach außen hin zu befürchten steht, könnte ein Zusammenhang des Gewölbes in horizontaler Richtung nur durch die Cohäsion des Mörtels, welche hier jedoch der Sicherheit wegen ganz vernachlässigt werden muß, veranlaßt werden.

Für die Klostergewölbe, welche der Hauptsache nach in der Construction nicht wesentlich von den Kuppelgewölben verschieden sind, würde die theoretische Untersuchung auf ganz dieselbe Weise anzustellen sein; man wird dabei natürlicherweise die Vertikal-Ebenen, wodurch man sich das ganze Gewölbe in einzelne Stücke von Tonnengewölben zerschnitten denkt, durch die Ecken der polygonalen Basis und durch die Grate des Gewölbes legen.

Bei den Kreuzgewölben, die meistens ein Quadrat zur Grundform haben, ruht das Gewicht des ganzen Gewölbes auf den Graten, welche ihrerseits sich auf Pfeiler stützen. Dabei hat jeder Grat für sich zwei halbe Tonnengewölbe zu tragen, deren Achsen mit einander einen rechten Winkel einzuschließen pflegen, und deren Länge am Gewölbanfang sehr klein ist, aber von da nach dem Gewölbscheitel zu fortwährend zunimmt (gerade umgekehrt wie bei den Kloster- und

Kuppelgewölben). Man darf sich nun ein solches halbes Tonnengewölbe durch ein anderes von gleichmäßiger Länge ersetzt denken, worin aber die Dichtigkeit und die Größe der rückwirkenden Festigkeit des Materiales von unten nach oben zu fortwährend zunimmt. Dafür hat man dann nach unseren allgemeinen Formeln die Lage der Bruchfuge und die Stärke des Horizontalschubes zu bestimmen, auch die Mittellinie des Druckes zu zeichnen und zu untersuchen, ob an keiner Stelle des Gewölbes die Pressung pro Flächeneinheit zu groß wird. Wenn an den Graten eines Kreuzgewölbes vorspringende Bögen sich befinden, so können dieselben als halb zu dem einen, halb zum andern Tonnengewölbe gehörig angesehen werden. Bei Bestimmung der Pfeilerstärken muß man beachten, daß die beiden halben Tonnengewölbe, welche ein Pfeiler zu tragen hat, denselben in diagonaler Richtung umzuwerfen streben, und daß der gegen den Pfeiler wirkende Schub sich aus den Horizontalschüben jener beiden Gewölbe nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte zusammensetzt. Bei allen diesen Betrachtungen hat man also den Zusammenhang der Gewölbsteine in horizontaler Richtung, welcher namentlich an den Graten wirksam zu sein pflegt, der Sicherheit wegen ganz zu vernachlässigen.

Bei den schiefen Tonnengewölben, wobei die beiden Gewölbstirnen in schiefen Vertikal-Ebenen zur Gewölbachse liegen, und wobei man meistens die sämmtlichen Lager- und Stoßfugen nach Schraubenlinien zu construiren pflegt, wird die theoretische Untersuchung äußerst verwickelt, wenn man alle dabei vorkommenden Umstände und namentlich die Erscheinungen, welche diese Gewölbe bei ihrem Setzen nach dem Ausrüsten der Lehrbögen darbieten, gehörig berücksichtigen will. Es zeigt sich nämlich immer, wenn die schiefen Gewölbe auch noch so gut construirt und genau ausgeführt worden sind, daß dieselben bei dem Setzen sich ungleichmäßig verhalten, als ob sie aus drei abgesonderten Theilen beständen; es setzt sich der mittlere Theil des Gewölbes, welche Neigung die Lager- und Stoßfugen auch haben mögen, ganz ähnlich so, als ob er wie ein rechtwinkliges Tonnengewölbe construirt wäre, und an den Gewölbstirnen sowie an den spitzen Ecken der beiden Widerlager findet sowohl bei den Gewölbsteinen als in den Widerlagern ein Herausdrängen der Steine nach außen hin und zugleich eine sehr starke Normalpressung statt, so daß dadurch das Material, wenn es keine sehr große Festigkeit besitzt, leicht zerdrückt werden kann, und namentlich ein Absplittern der Kanten an den einzelnen Steinen dadurch in vielen Fällen hervorgerufen wird. Diese Erscheinungen lassen sich leicht aus dem Umstande erklären, daß die Gewölbsteine nicht nur in rechtwinklicher Richtung zu ihren Lagerflächen, sondern auch in der Richtung dieser Lagerflächen selbst sich in Spannung befinden, und daß jeder Gewölbstein als in der Durchkreuzung von zwei verschiedenen Bögen, wovon der eine in

der Richtung der Stoßfugen, der andere in der Richtung der Lagerfugen läuft, liegend angesehen werden muß. Es werden sich nun für den mittleren Theil des Gewölbes die beiden verschiedenen Spannungen eines jeden Gewölbsteines nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte zu einer einzigen Spannung, welche gegen die Widerlager rechtwinklich gerichtet ist, zusammensetzen lassen; an beiden Gewölbstirnen aber, wo die Spannung in der Richtung der Lagerfugen keinen Widerstand mehr findet, muß ein Herausschieben der Gewölbsteine nach außen eintreten, welches neben den stumpfen Winkeln der Widerlager am schwächsten oder gar nicht sich zeigen, aber von da nach dem entgegengesetzten spitzen Winkel des andern Widerlagers zu fortwährend wachsen wird. Insbesondere wird sich auch diese herausschiebende Kraft an den spitzen Winkeln der Widerlager, welche dadurch einem leichten Abbrechen ausgesetzt sind, äußern.

Wie aus dem Vorstehenden genugsam hervorgeht, so bringt die Construction eines schiefen Gewölbes immer mancherlei Unzuträglichkeiten mit sich, welche sich durch keine der bisher bekannten Constructionsarten ganz vermeiden lassen. Aus diesem Grunde sowie der schwierigen Ausführung wegen sucht man in der Praxis überhaupt den Bau der schiefen Gewölbe zu vermeiden, und pflegt wenigstens als Regel anzunehmen, daß der Winkel, den die schiefe Richtung der Gewölbstirnen mit der Gewölbachse einschließt, nicht spitzer als 45 Grad sein darf. Es ist ferner zu bemerken, daß sich der Uebelstand eines Herausschiebens und Zerbrechens der Steine an den Gewölbstirnen bei flachen Bögen erheblich geringer als bei stark gekrümmten Bögen von größerer Pfeilhöhe zeigt. Die verschiedenen Methoden, wonach man in neuerer Zeit die schiefen Gewölbe zu construiren pflegt, sind in einer recht schätzbaren Abhandlung des Ingenieur Graeff in den Annales des mines, Jahrg. 1852, Band 3, in ausführlicher Weise beschrieben, durch eine Menge von Zeichnungen erläutert und in Bezug auf ihre Vortheile und Nachtheile mit einander verglichen.

Eine Theorie der schiefen Gewölbe würde äußerst schwierig zu begründen sein, wenn man dabei die beiden verschiedenen Spannungen, welche jeder einzelne Gewölbstein zu erleiden hat, berücksichtigen wollte, und sie würde doch nur zu unsicheren Resultaten führen. In den Grenzen, worin es eigentlich nur erlaubt ist ein schiefes Gewölbe zu construiren, d. h. wenn der Querschnitt des Gewölbes ein Flachbogen ist und wenn die Richtung der Gewölbstirnen einen größeren Winkel als 45 Grad mit der Gewölbachse einschließt, so wird es mit annähernder Richtigkeit genügen, bei der theoretischen Untersuchung nur die Spannung der Gewölbsteine in rechtwinkliger Richtung zu ihre Lagerflächen zu berücksichtigen, also das schiefe Gewölbe wie aus sehr vielen neben einander stehenden unabhängigen Bögen zusammengesetzt, oder wie ein rechtwinkliches Tonnengewölbe, dessen Querschnitt mit den Stirnflächen des

schiefen Gewölbes übereinstimmt, zu betrachten. Demnach würden mithin alle unseren bisher abgeleiteten Formeln unverändert für schiefe Tonnengewölbe ebensowohl wie für rechtwinklige anwendbar sein*).

Kapitel V.

§. 37.

In den vorangehenden Kapiteln sind alle die nöthigen allgemeinen Gleichungen, worauf sich die Construction eines stabilen Gewölbes gründen muß, entwickelt worden. Ein Theil dieser Gleichungen ist aber von so unbequemer Form, daß man sich bei ihrer Anwendung zur Berechnung irgend eines Beispieles in ungemeine Weitläufigkeiten verwickeln würde, wenn man dabei nicht einen ganz besonderen Gang der Untersuchung, welcher in den folgenden Paragraphen näher auseinandergesetzt werden wird, einschlägt.

Es mag zunächst die im §. 32 abgeleitete Gleichung (40) der Mittellinie des Druckes für einen Halbkreisbogen mit horizontaler Abdeckung näher untersucht werden; dieselbe heißt:

$$Y_0 - Y = \frac{\varrho \, . \, r^3}{P_0} \, . \left(\frac{H}{r} \, . \, \frac{sin^2 \, \alpha}{2} - \frac{\alpha \, . \, sin \, \alpha}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{cos \, \alpha}{2} + \frac{cos^3 \, \alpha}{6} + \tfrac{1}{3} \right).$$

Wenn man in diesem Fall den halben Innenbogen, einen Viertelkreis, von 9 zu 9 Grad eintheilt, also im Ganzen in 10 Theile theilt, und durch die betreffenden Theilpunkte Verticalen zieht, so wird es genügen, die Lage der Mittellinie des Druckes für die hierdurch dargestellten 10 Vertikalfugen des Gewölbes zu bestimmen. Es ist nun zu bemerken, daß der, in der Klammer auf der rechten Seite der obigen Gleichung eingeschlossene Ausdruck aus 5 Gliedern besteht, wovon die 4 letzten ganz unabhängig von den Dimensionen des Gewölbes sind, und daß das erste Glied $\frac{H}{r} \, . \, \frac{sin^2 \, \alpha}{2}$ wenigstens einen Fak-

---

*) Die im §. 36 enthaltenen Bemerkungen über die Natur verschiedenartiger Gewölbe von verwickelter Construction sind möglichst zusammengedrängt worden, weil diese Gewölbarten im Vergleich zu den gewöhnlichen Tonnengewölben doch nur seltene Anwendung finden, und eine ausführliche Theorie derselben unverhältnißmäßig viel Raum in Anspruch nehmen würde. Was Carvallo darüber sagt, ist von dem Vorstehenden völlig abweichend, ziemlich dürftig und theilweise unrichtig; er behauptet z. B., daß derselbe Querschnitt, welcher aus unseren Formeln für ein stabiles Tonnengewölbe gefunden wird, auch für ein stabiles Kuppelgewölbe passe.

tor $\frac{sin^2 \alpha}{2}$ enthält, welcher dieselbe Eigenschaft besitzt. Wenn also in der folgenden kleinen Tabelle der Werth der 4 letzten Glieder und des unabhängigen Factors vom ersten Gliede jenes Ausdruckes für die 10 verschiedenen Werthe des Winkels α von 9 bis 90 Grad gegeben ist, so wird die Rechnung, wonach man die 10 Ordinaten der Mittellinie des Druckes für die Abscissen, welche den 10 Theilpunkten des Innenbogens entsprechen, bestimmt, eine sehr einfache sein.

Winkel α	Werth von $-\frac{\alpha . sin \alpha}{2} - \frac{cos \alpha}{2} + \frac{cos^3 \alpha}{6} + 1/3.$	Logarithmus von $\frac{sin^2 \alpha}{2}$.	Werth von $\frac{sin^2 \alpha}{2}$
9 Grad	— 0,0122111	0,0876348—2	0,0122359
18 „	— 0,0473620	0,6789348—2	0,0477458
27 „	— 0,1012444	0,0130636—1	0,1030537
36 „	— 0,1675807	0,2374074—1	0,1727457
45 „	— 0,2389737	0,3979400—1	0,2500000
54 „	— 0,3079522	0,5148852—1	0,3272565
63 „	— 0,3679211	0,5987318—1	0,3969464
72 „	— 0,4138216	0,6553826—1	0,4522542
81 „	— 0,4423989	0,6882098—1	0,4877641
90 „	— 0,4520608	0,6989700—1	0,5000000

Diese Tabelle wird nicht allein für halbkreisförmige Bögen, sondern auch für die in §. 33 bis 35 betrachteten anderen Gewölbformen eines elliptischen, Kreissegment= oder Korbbogens brauchbar sein, weil die dafür entwickelten Gleichungen der Mittellinie des Druckes in der Klammer auf ihrer rechten Seite genau dieselben unabhängigen vier letzten Glieder und denselben unabhängigen Factor des ersten Gliedes wie die Gleichung (40) enthalten.

§. 38.

Die 8 Hauptgleichungen, welche zur Bestimmung der Lage der Bruchfuge, des Horizontalschubes, der Gewölbdicke im Scheitel und der größten Pressung pro Flächeneinheit in §. 17 und 18 entwickelt wurden, enthalten im Ganzen 9 unbekannte Größen, wovon man sich irgend eine von vornherein geben muß, um danach die 8 übrigen berechnen zu können. Obgleich es nun vielleicht am natürlichsten erscheinen möchte, die größte Pressung pro Flächeneinheit P', welche die rückwirkende Festigkeit des Materiales nicht übersteigen darf, als gegeben anzusehen, so muß man doch, um bei der Rechnung auf keine unübersteiglichen Schwierigkeiten zu stoßen, zunächst über die Gewölbdicke im Scheitel oder über die Lage der Bruchfuge eine vorläufige Annahme machen, welche man aber nur dann als wirklich gültig an=

sehen wird, wenn nach Ausführung aller erforderlichen Rechnungen ein zulässiger Werth für die größte Pressung P' sich daraus ergiebt. Um dieses Probiren zu erleichtern, d. h. um von vornherein die vorläufigen Annahmen annähernd richtig zu machen, darf man empirische Formeln und Erfahrungs-Resultate benutzen. Es pflegt nämlich, wie bereits im §. 21 mitgetheilt wurde, bei den halbkreisförmigen oder gedrückten Bögen mit horizontaler Abdeckung, welche Fälle am meisten in der Praxis vorkommen und hier allein betrachtet werden mögen, die Bruchfuge in den meisten Fällen sich annähernd an derjenigen Stelle des Innenbogens zu bilden, wofür der Bruchwinkel gleich 60 Grad ist (was bei gedrückten Bögen natürlicherweise nur dann richtig ist, wenn der halbe Centriwinkel des Bogens größer als 60 Grad ist). Wir werden also mit annähernder Genauigkeit bei Anwendung der in den vorigen Kapiteln abgeleiteten allgemeinen Formeln zur Berechnung von Beispielen für gewöhnlich den Bruchwinkel = 60 Grad annehmen können und danach die sämmtlichen übrigen unbekannten Größen ermitteln *).

Die Lage der Bruchfuge in einem gegebenen Gewölbe wird bekanntlich nach §. 9 und 10 dadurch ermittelt, daß man von dem Ausdruck $\frac{Y_0 - Y}{Y_0 - y}$ das Maximum sucht, wobei sich die Bezeichnungen Y_0 und Y auf die, unter der Voraussetzung vertikaler Gewölbfugen construirte, Mittellinie des Druckes beziehen. Es enthält nun für alle unsere in §. 32 bis 36 betrachteten Gewölbformen der Ausdruck $(Y_0 - Y)$ einen jedesmal constanten Faktor, welcher vor der Klammer auf der rechten Seite der betreffenden Gleichung steht, und einen veränderlichen Faktor, nämlich den Inhalt der Klammer, worauf es hier bei der Bestimmung des Maximums allein ankommt. Zur leichten Bestimmung dieses veränderlichen Faktors für verschiedene Theilpunkte des Innenbogens dient die im vorigen Paragraphen mitgetheilte kleine Tabelle; für Halbkreis-Gewölbe heißt dieser Factor:

$$\left(\frac{H}{r} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{\alpha \cdot \sin \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\cos^3 \alpha}{6} + 1/3\right).$$

Man würde also von dem Ausdruck:

$$\left[\frac{\left(\frac{H}{r} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{\alpha \cdot \sin \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\cos^3 \alpha}{6} + 1/3\right)}{Y_0 - y}\right]$$

---

*) Dieser von Carvallo eingeschlagene Gang der Betrachtung ist hier, obgleich er nicht der beste zu sein scheint, ziemlich getreu der Hauptsache nach wiedergegeben, weil die am Schluß dieses Buches enthaltenen Tabellen danach berechnet sind. Es ist nämlich doch zu willkürlich und mit der Wirklichkeit nicht genug übereinstimmend, den Bruchwinkel für alle verschiedenen Gewölbformen und Höhen der Abdeckung durchgehends = 60 Grad anzunehmen. Siehe den Anhang.

das Maximum zu suchen haben, und zwar würde man die Größe der Ordinate der Mittellinie des Druckes im Gewölbscheitel Y_0, welche bisher unbekannt war, derartig anzunehmen haben, daß dann der obige Ausdruck seinen größten Werth gerade für $\alpha = 60^0$ annehmen würde, weil dieses in Wirklichkeit immer annähernd die Lage der Bruchfuge ist. Diese Rechnungs-Operation läßt sich am leichtesten durch Probiren ausführen, indem man vorläufig mit Hülfe einer brauchbaren empirischen Formel für Y_0 einen annähernd richtigen Werth ermittelt und in den obigen Ausdruck einführt, und dann durch Substitution der verschiedenen Werthe von 9^0, 18^0, 27^0 ꝛc. für α sowie der entsprechenden Werthe für $y = r \,.\, cos\, \alpha$ untersucht, ob der obige Ausdruck unter dieser Annahme wirklich für $\alpha = 60^0$ ein Maximum werden würde. Wenn dieses der Fall ist, so müssen für den nächstgelegenen tieferen und höheren Werth von α, welcher in der Tabelle des §. 37 enthalten ist, also für $\alpha = 54^0$ und $\alpha = 63^0$, die beiden entsprechenden Werthe des obigen Ausdruckes annähernd gleich groß sein. Wenn aber dieses nicht der Fall ist, wenn also die für Y_0 gemachte vorläufige Annahme nicht hinreichend richtig war, so bestimmt man die Differenz δ_1, worum man die Annahme vergrößern muß, auf die folgende einfache Weise:

Es seien A und B die Werthe, welche der Zähler des obigen Ausdruckes für $\alpha = 54^0$ und $\alpha = 63^0$ annimmt, und a, b die Werthe, welche der Nenner $(Y_0 - y)$ desselben Ausdruckes bei der vorläufigen Annahme von Y_0 dafür annimmt. Die Quotienten $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ seien von einander verschieden. Wenn man nun, um diese beiden Quotienten einander gleich zu machen, den vorläufig angenommenen Werth von Y_0 um δ_1 wachsen läßt, so wird der Nenner des Ausdruckes um die constante Zahl δ_1 größer, und die beiden Quotienten, die annähernd einander gleich sein müssen, nehmen dann die folgende Gestalt an:

$$\frac{A}{a + \delta_1} = \frac{B}{b + \delta_1},$$

oder auf δ_1 reducirt:

$$(47).\quad \delta_1 = \frac{a \,.\, B - b \,.\, A}{A - B}.$$

Zur Bestimmung des vorläufig anzunehmenden, annähernd richtigen Werthes für Y_0 kann man zweckmäßig die folgende empirische Formel von Perronet, welche bereis in §. 21 mitgetheilt wurde, zur Berechnung der Schlußsteindicke $(\eta_0 - y_0)$ benutzen:

$$\eta_0 - y_0 = 0{,}0347 \,.\, W + 0{,}325. \text{ *)}$$

Hierin bezeichnet W die Spannweite des Gewölbes. Den Werth

*) Es muß ein Irrthum sein, daß Carvallo in dieser Formel den Coefficienten von W gleich 0,04347 angiebt.

von Y_0 findet man danach, mit Rücksicht auf die in §. 18 gemachte Voraussetzung über den Angriffspunkt des Horizontalschubes im Gewölbscheitel, gleich:

$$Y_0 = y_0 + \frac{2}{3}(\eta_0 - y_0).$$

Da die obige empirische Formel von Perronet eigentlich nur für solche Gewölbe, welche nur eine geringe Belastung zu tragen haben, brauchbar ist, so thut man gut, wenn die Höhe der Abdeckung über dem Gewölbscheitel groß ist, für die vorläufige Annahme von Y_0 gleich willkürlich einen etwas größeren Werth zu setzen, als er sich aus jener empirischen Formel ergeben würde. Es darf hier jedoch darauf hingewiesen werden, daß im Allgemeinen wenig darauf ankommt, ob die vorläufige Annahme für Y_0 annähernd richtig oder erheblich unrichtig ist, weil die Größe des dabei gemachten Fehlers δ_1 sich jedenfalls mit Genauigkeit aus der Gleichung (47) bestimmen lassen wird.

§. 39.

Die fernere Bestimmung derjenigen unbekannten Größen, deren Kenntniß zur Ermittelung des Horizontalschubes P_0 und der größten Pressung pro Flächeneinheit P' erforderlich ist, läßt sich nun mit Hülfe der, in §. 17 und 18 entwickelten 8 Hauptgleichungen vornehmen.

Da die Lage der Bruchfuge als gegeben angesehen wird, so werden sich die Coordinaten x_m, y_m des zur Bruchfuge gehörigen Punktes des Innenbogens, und das erste Differential-Verhältniß y'_m für diesen Punkt ohne Weiteres aus der Gleichung des Innenbogens finden lassen. Wenn nämlich α_m den Bruchwinkel bezeichnet, den wir von vornherein $= 60^0$ angenommen haben, so ist

$$x_m = r \,.\, \sin \alpha_m,$$
$$y_m = r \,.\, \cos \alpha_m,$$
$$y'_m = tg\, \alpha_m.$$

Weil ferner der Werth von Y_0 bereits in dem vorigen Paragraphen bestimmt wurde, so bleiben nur noch die Unbekannten X_m, P_m, P_0 und P' übrig. Es ergiebt sich nun Y_m aus der Gleichung (A) des §. 18 als Function der schon bekannten Größen Y_0, y_m, x_m, y'_m. Dann findet man auch X_m mit leichter Mühe aus der Gleichung (I) des §. 17.

Zur Bestimmung von P_0 hat man die Gleichung (V) des §. 17:

$$P_0 = \frac{\varrho \,.\, \Psi\,(X_m)}{Y_0 - Y_m}.$$

Darin ist bekanntlich $\varrho \,.\, \Psi\,(X_m)$ der Ausdruck für das Gewicht desjenigen Gewölbtheils, welcher zwischen der Schlußfuge und einer Verticalfuge, deren Absciſſe gleich X_m sein würde, liegt. Zur Berechnung dieses Gewichtes würde man, wenn man für den zur Absciſſe

X_m gehörigen Punkt des Innenbogens den entsprechenden Werth des Winkels α bestimmt hat, einen der Ausdrücke, welche in §. 32 bis 35 für die verschiedenen Gewölbformen entwickelt worden sind, gebrauchen müssen.

Diese Berechnug kann man sich durch Benutzung der in §. 37 mitgetheilten kleinen Tabelle sehr erleichtern, welche für jede der bisher betrachteten Gewölbformen gleichmäßig anwendbar ist. Bei genauerer Betrachtung dieser Tabelle erkennt man nämlich mit Leichtigkeit, daß darin die Werthe der beiden, vom Winkel α allein abhängigen Theile der allgemeinen Gleichung $P_0 . (Y_0 - Y) = \varrho . \Psi(x)$ ziemlich gleichmäßig mit den Werthen von α wachsen, und zwar bei kleineren Werthen von α (unter 45°) in etwas stärkerem Maße, bei größeren Werthen von α (worauf es hier vorzüglich ankommt, weil der Bruchwinkel fast immer größer als 45° ist) in etwas schwächerem Maße als der Winkel α selbst. Man wird also immer eine annähernde Genauigkeit erhalten, wenn man für einen Werth von α, welcher nicht in der Tabelle enthalten ist, (wie es in der Regel mit demjenigen Werthe von α, welcher der Abscisse X_m entspricht, der Fall sein wird,) die zugehörigen Werthe der von α abhängigen Theile des Ausdruckes $\Psi(x)$ einfach dadurch berechnet, daß man jedesmal zwischen den beiden nächstliegenden Werthen der Tabelle das arithmetische Mittel nimmt. Die kleinen Fehler, welche bei dieser Rechnung gemacht werden, müssen, wie man sich bei genauer Ansicht der Tabelle leicht überzeugen kann, einander auch größtentheils aufheben, weil der eine Fehler negativ sein wird, während der andere positiv ist *).

Sobald der Horizontalschub P_0 auf die bezeichnete Weise bestimmt worden ist, so ergiebt sich der Werth der größten Pressung P' pro Flächeneinheit durch Umsetzung der Gleichung VII. des §. 18 gleich:

$$P' = \frac{4}{3} \frac{P_0}{Y_0 - y_0}.$$

Sollte der hieraus gefundene Werth von P' so groß sein, daß das angewendete Material diese Pressung nicht dauernd ertragen kann, so würde man über die Gewölbdicke $\eta_0 - y_0$ im Scheitel, also auch über Y_0, eine zweite Annahme aufstellen, und dabei natürlicherweise von der Bedingung, daß der Bruchwinkel gerade gleich 60° sein soll, abgehen müssen. Unter dieser Voraussetzung bestimmt man dann die Größe des Bruchwinkels auf die Weise, daß man von dem Ausdruck $\frac{\varrho . \Psi(x)}{Y_0 - y}$ die verschiedenen Werthe mit Hülfe der Tabelle des §. 37 für die darin vorkommenden Werthe von α berechnet,

---

*) Anstatt dieses einfachen und natürlichen Weges zur Berechnung der Funktion $\Psi(X_m)$ wendet Carvallo eine sehr schwierige und weitläufige Annäherungs-Methode an, welche außerdem ziemlich ungenaue Resultate liefert und hier deßhalb gar nicht mitgetheilt worden ist.

und es wird dann bei Uebersicht der so berechneten Werthe ein Leichtes sein, mit hinreichender Genauigkeit die Größe des Bruchwinkels, wofür der obige Ausdruck ein Maximum werden muß, anzugeben. Die übrigen Rechnungen zur Bestimmung der Größen P_0 und P' für diese zweite Annahme bleiben dieselben, wie sie bereits in diesem Paragraphen beschrieben wurden.

§. 40.

Zur besseren Verdeutlichung der, in den vorangehenden Paragraphen dieses Kapitels gegebenen Regeln zur Anwendung unserer Theorie auf die Praxis erscheint es zweckmäßig, für irgend ein Beispiel die nöthige Rechnung vollständig durchzuführen.

Es sei die Mittellinie des Druckes für ein Gewölbe zu construiren, dessen Innenbogen einen Halbkreis von 8^m Radius bildet und wobei die Höhe der Abdeckung über dem Scheitel des Innenbogens $h = 2^m$ und folglich über Gewölbanfang $H = 10^m$ ist. Die gemeinsame Dichtigkeit der Gewölbsteine und der Abdeckung sei $\varrho = 2400^k$.

Zunächst hat man mit Hülfe der kleinen Tabelle des §. 37 den Werth der Parenthese

$$\left(\frac{H}{r} \cdot \frac{sin^2\,\alpha}{2} - \frac{\alpha\,.\,sin\,\alpha}{2} - \frac{cos\,\alpha}{2} + \frac{cos^3\,\alpha}{6} + {}^1\!/_3\right)$$

für die 10 verschiedenen Werthe des Winkels α von 9 bis 90 Grad zu berechnen und übersichtlich zusammenzustellen.

Winkel α.	Werth der Parenthese.
9 Grad	0,0030838
18 „	0,0123202
27 „	0,0275728
36 „	0,0483515
45 „	0,0735263
54 „	0,1011155
63 „	0,1282618
72 „	0,1515459
81 „	0,1673061
90 „	0,1729392

Dann hat man über die Gewölbdicke $\eta_0 - y_0$ im Scheitel eine vorläufige Annahme zu machen, indem man dieselbe nach der empirischen Formel von Perronet

$$\eta_0 - y^0 = 0{,}0347\,.\,W + 0{,}325^m$$

berechnet, worin für den vorliegenden Fall $W = 2r = 16^m$ zu substituiren ist. Es ergiebt sich daraus die vorläufige Annahme für:

$$\eta_0 - y_0 = 0{,}8802^m,$$

und nach der Gleichung $Y_0 = y_0 + \frac{2}{3}(\eta_0 - y_0)$ für:

$$Y_0 = 8{,}5868^m, \text{ oder setze}$$

$$Y_0 = 8{,}6^m.$$

Nach unserer allgemeinen Voraussetzung, daß für gewöhnliche Fälle der Bruchwinkel annähernd gleich 60 Grad sein wird, müßte nun der Ausdruck

$$\left(\frac{\frac{H}{r} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{\alpha . \sin\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\cos^3\alpha}{6} + \frac{1}{3}}{Y_0 - y}\right)$$

für $\alpha = 54^0$ und $\alpha = 63^0$ annähernd denselben Werth geben, wenn überhaupt die obige Annahme für Y_0 richtig wäre. Man findet aber den Fehler δ_1, welcher bei dieser Annahme gemacht worden ist, auf die folgende Weise:

Nach der obigen kleinen Tabelle ist der Werth vom Zähler jenes Ausdruckes:

für $\alpha = 54$ Grad, $A = 0{,}1011155$,
" " 63 " $B = 0{,}1282618$;

und die Werthe vom Nenner jenes Ausdruckes $Y_0 - y = Y_0 - r.\cos\alpha$ finden sich durch einfache Rechnung:

für $\alpha = 54$ Grad, $a = 3{,}885$,
" " 63 " $b = 4{,}955$.

Nun ergiebt sich aus Gleichung (47)

$$\delta_1 = \frac{a.B - b.A}{A - B}$$

die Größe des Fehlers δ_1 gleich:

$$\delta_1 = + 0{,}092^m.$$

Um diese Differenz hat man die vorläufige Annahme von Y_0 zu vergrößern, und man erhält also als berichtigten Werth für:

$$Y_0 = 8{,}692^m,$$

und für die Gewölbdicke im Scheitel:

$$\eta_0 - y_0 = \frac{3}{2}(Y_0 - y_0) = 1{,}038^m.$$

Die Ordinate y^m für den zur Bruchfuge gehörigen Punkt des Innenbogens, also für $\alpha_m = 60^0$, findet sich:

$$y_m = r.\cos\alpha_m = 4^m.$$

Um die Ordinate der Mittellinie des Druckes in der Bruchfuge zu bestimmen, wendet man die Formel (A) des §. 18 an, worin man überall den Factor $\left(\frac{y'^2_m}{1 + y'^2_m}\right)$ einfacher durch $\sin^2\alpha_m = \sin^2 60^0$ ersetzen kann, so daß dann diese Formel die folgende Gestalt annimmt:

$$(Y_m - y_m)^2 . \left[1 - \frac{(Y_0 - y_0)^2}{4} . \sin^2\alpha_m . \frac{1}{(Y_0 - y_m)^2}\right] +$$

$$+ 2(Y_m - y_m) . \frac{(Y_0 - y_0)^2}{4} . \sin^2\alpha_m . \frac{1}{(Y_0 - y_m)} - \frac{(Y_0 - y_0)^2}{4} = 0.$$

Die Substitution der bereits bekannten Werthe von Y_0, y_0, y_m, α_m in diese Formel ergiebt:

$0{,}995128 \,.\, (Y_m - y_m)^2 + 2\,(Y_m - y_m) \,.\, 0{,}02286 - 0{,}143 = 0,$
und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung für $(Y_m - y_m)$ findet man:

$$Y_m - y_m = -\frac{0{,}02286}{0{,}995128} + \sqrt{\left(\frac{0{,}02286}{0{,}995128}\right)^2 + \frac{0{,}143}{0{,}995128}},$$

oder ausgerechnet:

$$Y_m - y_m = 0{,}357_m, \text{ und folglich}$$
$$Y_m = 4{,}357^m.$$

Die Abscisse für denselben Punkt der Mittellinie des Druckes ist

$$x_m = Y_m \,.\, tg\,\alpha_m = 7{,}546^m,$$

und für denjenigen Punkt des Innenbogens, welcher dieselbe Abscisse X_m hat, ist der entsprechende Werth des Winkels α gleich

$$\alpha_x = Arc.\left(sin = \frac{x_m}{r}\right) = 70^0\,36'.$$

Denjenigen Werth der Parenthese, welcher diesem Winkel α_x entspricht, findet man hinreichend genau durch Interpolation zwischen die beiden nächstliegenden Werthe derselben für $\alpha = 63^0$ und $\alpha = 72^0$ aus der für dieses Beispiel berechneten kleinen Tabelle auf die folgende einfache Weise:

Der Werth der Parenthese nimmt von $\alpha = 63^0$ bis $\alpha = 72^0$ im Ganzen um 0,0232841, also durchschnittlich pro Grad um 0,0025871 zu, und würde also, da der obige Werth von $\alpha_x = 70^0\,36'$ um $7^3/_5$ Grad größer als 63^0 ist, dafür annähernd genau gleich

$$7{,}6 \,.\, 0{,}0025871 + 0{,}1282618 = 0{,}1478$$

zu setzen sein. Dieser Werth ist für die Parenthese in die Gleichung

$$P_0 = \frac{\varrho \,.\, \psi\,(x_m)}{Y_0 - Y_m}$$
$$= \frac{\varrho \,.\, r^3}{Y_0 - y_m}\left[\frac{H}{r} \,.\, \frac{sin^2\,\alpha_x}{2} - \frac{\alpha_x \,.\, sin\,\alpha_x}{2} - \frac{cos\,\alpha_x}{2} + \frac{cos^3\,\alpha_x}{6} + {}^1/_3\right]$$

zu substituiren, wodurch man den Horizontalschub findet:

$$P_0 = 41895^k.$$

Die größte Pressung P' pro Flächeneinheit ergiebt sich nun aus der Gleichung:

$$P' = {}^4/_3\,\frac{P_0}{Y_0 - y_0} = 80722^k.$$

Diese Pressung ist jedenfalls noch vollkommen zulässig, weil schon für verhältnißmäßig schlechtes Material, für gewöhnliche Bruchsteine, die größte dauernde Pressung pro Quadratmeter durchschnittlich 100000^k betragen darf.

Das Gewicht P_v des halben Gewölbes nebst der senkrecht darüber liegenden Abdeckung, welches zur Bestimmung der Widerlagsstärken erforderlich ist, findet man aus Gleichung (39)

$$P_v = \varrho \,.\, 2r \,.\left(\frac{H}{r} - \frac{\pi}{4}\right)$$

durch Substitution der gegebenen Werthe für ϱ, r und H gleich:

$$P_v = 71423^k.$$

Die 10 Ordinaten der Mittellinie des Druckes, welche den 10 Theilpunkten des Innenbogens entsprechen, erhält man nach der Gleichung (40)

$$Y_0 - Y = \frac{\varrho \cdot r^3}{P_0} \cdot \left(\frac{H}{r} \cdot \frac{sin^2 \alpha}{2} - \frac{\alpha \,.\, sin\, \alpha}{2} - \frac{cos\, \alpha}{2} + \frac{cos^3 \alpha}{6} + \tfrac{1}{3}\right),$$

worin die verschiedenen Werthe der Parenthese für dieses Beispiel bereits bekannt sind, durch einfache Multiplication dieser Werthe mit dem ebenfalls bekannten Factor $\frac{\varrho \cdot r^3}{P_0} = 29{,}307$ gleich:

Winkel α.	Ordinate $Y_0 - Y$.
9 Grad	0,09045 Meter.
18 "	0,36135 "
27 "	0,80865 "
36 "	1,4181 "
45 "	2,1567 "
54 "	2,9653 "
63 "	3,7632 "
72 "	4,4435 "
81 "	4,9070 "
90 "	5,0712 "

Hierbei ist zu bemerken, daß man die Werthe für $Y_0 - Y$ als Ordinaten in Bezug auf eine neue Abscissenachse, welche man sich horizontal durch den Angriffspunkt des Horizontalschubes im Gewölbscheitel gelegt denkt, ansehen kann.

Vom Außenbogen des eigentlichen Gewölbes sind durch unsere gemachten Voraussetzungen nur 2 Punkte bestimmt festgelegt, nämlich in der Scheitelfuge und der Bruchfuge, weil nach den in §. 15 enthaltenen Betrachtungen über die Vertheilung der Pressung in den Fugen die Mittellinie des Druckes sich im Gewölbscheitel dem Außenbogen, an der Bruchfuge aber dem Innenbogen bis auf $\frac{1}{3}$ der betreffenden Gewölbstärke (rechtwinklich zum Innenbogen gemessen) nähern muß. Man hat also in der Zeichnung den rechtwinkligen Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen in der Scheitelfuge $1\frac{1}{2}$ mal, und in der Bruchfuge 3 mal zu nehmen, um an beiden Stellen die erforderliche Gewölbstärke zu bekommen. Hierdurch sind demnach 2 Punkte des Außenbogens festgelegt; der Lauf dieser Curve kann im Uebrigen zwar ziemlich willkürlich angenommen werden, jedoch wird man am besten thun, den rechtwinklichen Abstand derselben von der Mittellinie des Druckes zwischen Scheitelfuge und Bruchfuge möglichst

gleichmäßig wachsen zu lassen, oder wenigstens eine einfache Curve, z. B. einen Kreissegmentbogen, welche diesem Zweck nahezu entspricht, durch jene beiden fest bestimmten Punkte zu legen. Eine Tangente an diesen Bogen bildet den Uebergang vom Außenbogen des Gewölbes in die obere Fläche des Widerlagers *).

§. 41.

Um alle diejenigen Rechnungen, welche bei dem obigen Beispiele vorkamen, in ähnlichen Fällen vermeidlich zu machen, hat Carvallo für Halbkreis-Gewölbe von 1 bis 40 Meter Radius und von 1 bis 12 Meter Höhe der Belastung über dem Scheitel des Innenbogens, alle bei der Construction des Gewölbes in Frage kommenden Größen nach seinen Formeln im Voraus berechnet und in der, am Schluß dieses Buches enthaltenen Tabelle zusammengestellt, nämlich: Die 10 Ordinaten der Mittellinie des Druckes, die Gewölbdicke im Scheitel wovon $Y_0 - y_0$ gleich zwei Drittel ist, den Horizontalschub P_0, die größte Pressung pro Flächeneinheit P' und das Gewicht des halben Gewölbes nebst Abdeckung P_v. Es ist jedoch bei dieser Tabelle zu bemerken, daß dieselbe in der Praxis nur für solche Fälle, wo ein bedeutender Ueberschuß an Stabilität verlangt wird (z. B. bei Festungsbauten) anwendbar erscheint, namentlich dann, wenn die Spannweite schon ziemlich groß ist. Für kleinere Eisenbahn- und Wegbrücken, etwa bis zu 10^m Radius, ist die Tabelle ebenfalls zu gebrauchen, weil bei diesen Brücken der geringeren Mauermasse wegen die Pressung P' durch zufällige Belastungen (Locomotiven, Wagen, Menschen 2c.) und namentlich durch die dabei vorkommenden Erschütterungen verhältnißmäßig bedeutend stärker gesteigert wird als bei größeren Brücken. Es tragen nämlich alle die nur annähernd richtigen Voraussetzungen, welche zur Vereinfachung bei Ableitung der Formeln, wonach die Tabelle berechnet ist, von uns gemacht wurden, mehr oder weniger dazu bei, daß die in der Tabelle angegebenen Werthe von Y_0, P_0, P' für die meisten Fälle wesentlich zu groß sind, wenn nicht aus besonderen Rücksichten ein erheblicher Ueberschuß an Stabilität von dem Gewölbe verlangt wird. Vorzüglich sind es die folgenden 3 Annahmen, wonach man immer zu große Werthe für die Gewölbdicke erhält: Die Ableitung der Gleichung für die Mittellinie des Druckes unter der Voraussetzung verticaler Gewölbfugen, ferner die in §. 15 entwickelte Navier'sche Hypothese über die Vertheilung der Pressungen in den Fu-

---

*) Daß die für das Beispiel dieses Paragraphen berechneten Werthe der Ordinaten $Y_0 - Y$ und der Größen Y_0, P_0, P', P_v nur annähernd, aber nicht ganz genau mit denjenigen Werthen übereinstimmen, welche dafür in der am Schluß dieses Buches mitgetheilten Tabelle angegeben sind, kommt daher, daß wir die Rechnung an einigen Stellen auf einfachere und doch genauere Weise wie Carvallo geführt haben.

gen, worauf sich die ganze spätere Theorie gründet, und endlich die Annahme, daß der Bruchwinkel immer = 60^0 sein soll, während er für die gewöhnlich vorkommenden Fälle zwischen 54^0 und 60^0 zu liegen pflegt.

Bei Aufstellung der Tabelle wurden die gesuchten Größen nicht für jeden einzelnen Fall besonders berechnet, sondern nur für die Radien: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 Meter, und zwar für jeden dieser Radien bei 4^m und 12^m Höhe der Abdeckung über dem Scheitel des Innenbogens.

Dann wurden 2 Curven der Werthe von $Y_0 - y_0$ gezeichnet, den beiden Höhen der Belastung von 4^m und 12^m entsprechend. Dabei wurden die oben genannten Werthe der Radien als Abscissen, die danach berechneten Werthe von $Y_0 - y_0$ als Ordinaten genommen, und zwar die Höhen nach einem zehnmal größeren Maßstabe wie die Längen aufgetragen. Weil nun die beiden Curven in ihrem Lauf eine große Regelmäßigkeit zeigen, so war es möglich, für die zwischenliegenden Werthe der Radien, wofür die Rechnung nicht besonders vorgenommen wurde, die zugehörigen Werthe von $Y_0 - y_0$ durch einfache Messung der betreffenden Ordinaten aus der Zeichnung mit großer Genauigkeit zu erhalten. Die Werthe von P_0 und P' sind ganz auf dieselbe Weise wie diejenigen von $Y_0 - y_0$ als Ordinaten von Curven betrachtet und für die Radien, wofür sie nicht im Voraus berechnet waren, durch Messung aus der Zeichnung entnommen. Die Ausführung dieser Zeichnung mit eingeschriebenen Maßen findet sich in Tafel II, Fig. 1.

Bei der Curve der Ordinaten P' für die Belastung von 4^m ist zu bemerken, daß dieselbe im Allgemeinen continuirlich ist, und nur zwischen den Radien 15^m und 20^m einen Bruch ihrer Continuität zeigt, weil nämlich mit Rücksicht auf Erfahrungssätze bei der Berechnung der Bruchwinkel für 15^m Radius noch gleich 60^0, aber für 20^m Radius und darüber gleich 68^0 angenommen wurde. Dieser Bruch der Continuität findet sich natürlicherweise an derselben Stelle bei der Curve von P_0 und den im Folgenden erwähnten Curven der Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Belastung von 4_m wieder.

Nachdem der Horizontalschub P_0 bekannt war, so wurde es leicht, für die einzelnen Radien bei der Belastung von 4^m die Werthe der 10 Ordinaten $Y_0 - Y$ der Mittellinie des Druckes, welche den 10 Theilpunkten des Innenbogens entsprechen, zu berechnen. Die danach berechneten Werthe wurden dann als Ordinaten zur Zeichnung von 10 Curven, den 10 verschiedenen Werthen von α entsprechend, benutzt. Die Zeichnung hiervon findet sich in Tafel II, Fig. 2.

Die 10 Curven der Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Belastung von 12^m, welche auf ganz dieselbe Weise berechnet wurden, sind in derselben Figur gezeichnet. Alle diese Curven zeigen ein regelmäßiges Wachsen und die Curvenstücke zwischen je 2 Abscissen, wofür die Rechnung vorgenommen wurde, sind fast geradlinig, so daß man die Ordinaten,

welche den zwischenliegenden Werthen der Abscissen entsprechen, hinreichend genau durch Messung aus der Zeichnung finden kann.

Wenn man nun über den Innenbogen von irgend einem gegebenen Radius die beiden Curven zeichnet, welche die Mittellinie des Druckes für eine Belastung von 4^m und von 12^m darstellen, so erkennt man sofort, daß der Zwischenraum zwischen diesen beiden Curven überall im Verhältniß zum Radius des Innenbogens sehr klein ist, und daß man folglich ohne erheblichen Irrthum die Differenzen von je 2 Ordinaten dieser Curven, welche zu derselben Abscisse gehören, in 8 gleiche Theile eintheilen darf, um dadurch diejenigen Mittellinien des Druckes zu construiren, welche den zwischenliegenden Höhen der Belastung von 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 Meter entsprechen. Man darf ferner, um die Mittellinien des Druckes für die Belastungen von 1, 2, 3 Meter zu bestimmen, annehmen, daß dafür die Ordinaten $Y^0 - Y$ in eben derselben Weise wachsen, wie bei den größeren Werthen der Belastung.

Auf diese Weise wurden also die Ordinaten $Y^0 - Y$ der Mittellinie des Druckes für alle Werthe des Radius von 1 bis 40 Meter und für alle Höhen der Belastung von 1 bis 12 Meter bestimmt. Ebenso wurden die Werthe von P' für jeden einzelnen Fall als arithmetisches Mittel zwischen den beiden schon bekannten Werthen von P' für die Belastung von 4 und 12 Meter gefunden. Die Werthe von P_0 und P_v wurden für jeden Fall besonders berechnet, und zwar nach den Formeln:

$$P_0 = {}^3/_4 \frac{P'}{Y_0 - y_0}, \text{ und}$$

$$P_v = \varrho \, . \, r^2 \, . \left(\frac{H}{r} - \frac{\pi}{4}\right),$$

in welcher letzteren Gleichung man bekanntlich bei Halbkreisgewölben $h + r$ für H zu setzen hat.

Wenn man ein Gewölbe zu construiren hat, dessen Radius sich nicht als eine ganze Zahl von Metern ausdrücken läßt, so kann man dafür zur Bestimmung der Größen P_0, P', P_v und der Ordinaten der Mittellinie des Druckes entweder einfach den nächstliegenden niedrigeren oder höheren Werth des Radius r adoptiren, oder, wenn man genauer zu Werke gehen will, eine jede der verschiedenen gesuchten Größen als arithmetisches Mittel zwischen den beiden nächstliegenden Werthen der Tabelle oder unmittelbar durch Messung aus der Zeichnung bestimmen.

§. 42.

Es kommt jetzt darauf an zu zeigen, wie unsere Tabelle, welche ohne Weiteres nur für Halbkreis-Gewölbe gültig ist, sich auch für verschiedene andere Formen des Innenbogens gebrauchen läßt.

Für einen Kreissegment-Bogen wird unsere Tabelle immer dann

brauchbar sein, wenn dessen halber Centriwinkel größer als 60°, also größer als der gewöhnliche Bruchwinkel der Kreisgewölbe ist. Man muß dann nur den Werth von P_v jedesmal besonders nach der Formel

$$P_v = \varrho \cdot r^2 \left(\frac{H + h_1}{r} \cdot \sin \alpha_n - \frac{\alpha_n}{2} - \frac{\sin \alpha_n \cdot \cos \alpha_n}{2} \right)$$

berechnen, worin α_n den halben Centriwinkel des Bogens, H die Höhe der Abdeckung über Gewölbanfang und h_1 den Abstand einer durch den Gewölbanfang gehenden Horizontalen vom Mittelpunkte des Kreises bezeichnet.

Wenn der Winkel α_n kleiner als 60° ist, so würde das Gewölbe, wenn man auch dann noch die Tabelle benutzen wollte, unnöthige Stärken bekommen; man thut dann also jedenfalls am besten, für ein solches Gewölbe die Rechnung in ähnlicher Weise, wie dieselbe in §. 40 für ein Beispiel vorgenommen wurde, von vorn an auszuführen, wobei man den Bruchwinkel gleich α_n anzunehmen hat.

§. 43.

Um unsere Tabelle auch auf elliptische Gewölbe anwenden zu können, müssen wir dieselben mit halbkreisförmigen Gewölben vergleichen. Es bilde der Innenbogen des zu betrachtenden Gewölbes eine halbe Ellipse von den halben Achsen a und b, und es möge der Index ε alle diejenigen Größen, welche sich auf dieses elliptische Gewölbe beziehen, bezeichnen, und ebenso der Index c für ein Halbkreisgewölbe, dessen Radius gleich der halben kleinen Achse der Ellipse sei. Dann ist nach Gleichung (40) und (46):

$$(Y_{0c} - Y_c) \cdot P_{0c} = \varrho \cdot b^3 \cdot F\,(a, H, b).$$

$$(Y_{0\varepsilon} - Y_\varepsilon) \cdot P_{0\varepsilon} = \varrho \cdot a^2 \cdot b \cdot F\,(\alpha, H, b).$$

Es ist zu bemerken, daß in diesen beiden Gleichungen der Winkel α sich nicht etwa auf einen beliebigen Punkt des elliptischen Innenbogens, sondern auf einen in derselben Horizontalen liegenden Punkt des Viertelkreises vom Radius b bezieht, oder, was gleichbedeutend ist, auf den in derselben Vertikalen liegenden Punkt des Viertelkreises vom Radius a, was bei Ableitung der Gleichung (46) in §. 34 vorausgesetzt wurde.

Es ist ferner:

$$P_{0c} = {}^3/_4\, P'_c \cdot (Y_{0c} - b).$$

$$P_{0\varepsilon} = {}^3/_4\, P'_\varepsilon \cdot (Y_{0\varepsilon} - b).$$

Da nun für solche Abscissen, welche in dem Verhältniß wie a und b zu einander stehen, die zugehörigen Ordinaten y_ε der Ellipse und y_c des Kreises vom Radius b einander gleich sein müssen, so darf mit annähernder Richtigkeit vorausgesetzt werden, daß die Ordinaten $Y_{0\varepsilon} - Y_\varepsilon$ und $Y_{0c} - Y_c$ von 2 solchen Punkten der Mittellinien des Druckes in beiden Gewölben, deren Abscissen in dem

genannten Verhältniß zu einander stehen, ebenfalls gleich sein müssen, also

$$Y_{0\varepsilon} - Y_\varepsilon = Y_{0c} - Y_c.$$

Man findet nun durch Verbindung der beiden ersten obigen Gleichungen:

$$P_{0\varepsilon} = \frac{a^2}{b^2} \cdot P_{0c}.$$

Die für beide verglichenen Gewölbe anzunehmenden Schlußsteindicken kann man unmittelbar aus der Tabelle entnehmen, indem man sich nämlich das elliptische Gewölbe durch ein Kreisgewölbe von Halbmesser a ersetzt denkt. Es sei nun das Verhältniß zwischen jenen beiden Schlußsteindicken durch i bezeichnet, also

$$\frac{Y_{0\varepsilon} - b}{Y_{0c} - b} = i.$$

Demnach bekommt man, wenn man die oben gegebenen Ausdrücke von P_{0c} und $P_{0\varepsilon}$ durch einander dividirt:

$$P'_\varepsilon = \frac{1}{i} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot P'_c.$$

Es ist endlich, wie sich mit Leichtigkeit zeigen läßt:

$$P_{v\varepsilon} = \frac{a}{b} \cdot P_{vc}.$$

Durch die sämmtlichen obigen Gleichungen dieses Paragraphen sind also die Größen $Y_{0\varepsilon}$, $P_{0\varepsilon}$, P'_ε, $P_{v\varepsilon}$ und die 10 Ordinaten $Y_{0\varepsilon} - Y_\varepsilon$ für das elliptische Gewölbe als Functionen der entsprechenden Werthe für das Kreisgewölbe gegeben, und lassen sich demnach ohne Mühe aus unserer Tabelle finden.

Obgleich diese Methode der Construction eines elliptischen Gewölbes nur eine annähernd richtige genannt werden kann, so wird dieselbe doch immer innerhalb der Grenzen, worin unsere Tabelle auch für Kreisgewölbe nur anwendbar ist, hinreichend brauchbare Resultate liefern. Wenn man aber eine größere Genauigkeit erreichen will, so muß man die Rechnung für das elliptische Gewölbe nach der Weise des in §. 40 berechneten Beispieles ganz von Anfang an durchführen.

§. 44.

Die Anwendung der in §. 35 entwickelten Formeln für Korbbogen-Gewölbe würde zwar keine besonderen Schwierigkeiten darbieten, aber zu sehr weitläufigen und langweiligen Rechnungen führen, so daß man in der Praxis doch nur selten davon Gebrauch machen wird. Die Untersuchung wird aber in allen Fällen ungleich leichter und einfacher anzustellen sein, wenn man den Innenbogen als eine Ellipse ansieht, welche die Spannweite des Korbbogens zur großen Achse und dessen Pfeilhöhe zur halben kleinen Achse hat.

§. 45.

Wenn 2 verschiedene Gewölbe nebst Abdeckung ähnliche Figuren bilden, so besteht zwischen den darauf bezüglichen Größen immer ein gewisses, leicht zu findendes Verhältniß. Es verhalten sich dann nämlich die Horizontalschübe P_0 der beiden Gewölbe wie deren Querschnitte, d. h. wie die Quadrate der Radien zu einander; dagegen stehen die größten Pressungen pro Flächeneinheit P' nur im einfachen Verhältniß der Radien, wie sich durch eine einfache Betrachtung oder Rechnung zeigen läßt. Mit Hülfe dieser Bemerkungen kann man die, bei der Untersuchung eines Gewölbes in Frage kommenden Größen, sobald dieselben einmal für eine gewisse Anzahl von Gewölben bekannt sind, mit leichter Mühe für eine unendlich große Anzahl von neuen ähnlichen Gewölben berechnen.

Kapitel VI.

§. 46.

Es wird unsere Aufgabe in diesem letzten Kapitel sein, nach unseren Tabellen und allgemeinen Formeln einige Zahlenbeispiele vollständig durchzurechnen, so daß die Zeichnung des Gewölbes und der Widerlager oder Mittelpfeiler sofort danach vorgenommen werden kann.

Es dürfte hier am Platze sein, die am Schluß dieses Buches enthaltene Tabelle, welche als das hauptsächlichste Resultat unserer Untersuchungen anzusehen ist, etwas näher zu erklären. Dieselbe zerfällt eigentlich in 40 Stück einzelne kleine Tabellen, welche den verschiedenen Werthen des Radius R von 1 bis 40 Meter entsprechen. Die erste Verticalspalte enthält 12 verschiedene Werthe, nämlich 1 bis 12 Meter, für die Dicke der Belastung h, d. h. die Höhe von der Oberfläche der Gewölb-Abdeckung über dem Scheitel des Innenbogens. Die 10 folgenden Spalten geben die Ordinaten der Mittellinie des Druckes, den 10 Theilpunkten des Innenbogens entsprechend, und bezogen auf eine horizontale Abscissenachse, die durch den Angriffspunkt des Horizontalschubes in der Schlußfuge geht. Die zwölfte Verticalspalte giebt die Werthe von $Y_0 - y_0$, welche man noch mit $1\frac{1}{2}$ multipliciren muß, um die Schlußsteindicke zu bekommen. Die 3 letzten Spalten geben endlich die Werthe von P_0, P' und P_v.

Es ist zu bemerken, daß bei Berechnung dieser 3 letzteren Gewichte die Dichtigkeit 2c. des Materiales, nämlich dessen Gewicht pro Cubikmeter, gleich 2400 Kil. angenommen worden ist, was freilich eigentlich nur für einige der schwersten Sorten unter den gebräuchlichen Bausteinen, etwa für Granit oder sehr dichten festen Kalkstein seine Richtigkeit hat. Daher giebt die Tabelle für die gewöhnlich vor-

kommenden Bausteine, namentlich die verschiedenen Arten von Sandstein, deren Dichtigkeit durchschnittlich nur gleich 2000 Kil. pro Cubikmeter anzunehmen ist, in der Regel immer zu große, also für die Stabilität günstige Werthe.

Die in den folgenden Paragraphen berechneten Beispiele beziehen sich auf einige größere Brücken, welche vom Ingenieur Jules Carvallo für die Section der französischen Centralbahn zwischen Châteauroux und la Souterraine projectirt und ausgeführt wurden.

§. 47.

Erstes Beispiel.

Es sei die Mittellinie des Druckes und die Form des Außenbogens für das Gewölbe des Viaductes von Bouzanne zu bestimmen, welcher aus 13 Halbkreisbögen von 16^m Spannweite besteht, und wobei die Brückenbahn in einer Höhe von 38^m über der Thalsohle liegt. Die Stärke des Mauerwerks nebst Abdeckung über dem Scheitel des Innenbogens beträgt 4^m; also ist gegeben:

$$r = 8^m.$$
$$h = 4^m.$$
$$H = 12^m.$$
$$H_2 = 26^m.$$
$$H_3 = 38^m.$$

Eine Zeichnung dieses Gewölbes ist in Fig. 1, Tafel I gegeben. Man braucht natürlicherweise nur eine Hälfte des Gewölbes zu betrachten, welche dort auch nur gezeichnet ist.

Zunächst theile man den halben Innenbogen, also einen Viertelkreis, in 10 gleiche Theile und ziehe vertikale Linien durch die Theilpunkte. Dann suche man in der Tabelle den Radius von 8^m und in der ersten Vertikalspalte die Belastung von 4^m; in der zugehörigen Horizontalreihe findet man nun den Werth von $Y_0 - y_0 = 0^m,83$, welcher vom Scheitelpunkt m_0 des Innenbogens an auf der dadurch gelegten Vertikalen abzutragen ist. Durch den so gefundenen Punkt M_0 lege man die Horizontale $M_0\, T$, welche als neue Abscissenachse zur Construction der Mittellinie des Druckes angesehen wird. Zu dem Ende trägt man nämlich von dieser Linie aus nach unten auf den 10 verschiedenen, durch die Theilpunkte des Innenbogens gezogenen Vertikalen die 10 Werthe der Ordinaten $Y_0 - Y$:

0,115; 0,453; 0,996; 1,710; 2,540; 3,416;
4,249; 4,941; 5,402; 5,564 Meter,

welche für den vorliegenden Fall in der Tabelle gegeben sind, ab und verbindet die gefundenen Punkte durch eine continuirliche Curve.

Man findet ferner aus der Tabelle $P_0 = 65800$ Kil., $P_v = 109762$ Kil. und die größte Pressung pro Flächeneinheit $P' = 105700$ Kil., was noch hinreichend gering ist und zeigt, daß das Gewölbe noch einen bedeutenden Ueberschuß an Stabilität besitzen

wird, weil bei Quadergewölben die Gewölbsteine in der Regel noch eine Pressung von 200000 bis 300000 Kil. pro Quadratmeter dauernd ertragen können. Es schwankt nämlich das Gewicht, wodurch die Bausteine zerdrückt werden, je nach deren Beschaffenheit zwischen 1.000000 und 8.000000 Kilogramm pro Quadratmeter, und da anzunehmen ist, daß die Steine nur etwa $1/_{10}$ dieses Druckes wirklich auf die Dauer ertragen können, so wird die Grenze des zulässigen dauernden Druckes für alle Bausteine zwischen 100000 und 800000 Kil. liegen. Für gewöhnliches Bruchsteinmauerwerk, woraus man die Mittelpfeiler und Widerlager größtentheils herzustellen pflegt, darf man im Durchschnitt P' mindestens gleich 100000 Kil., für Gewölbmauerwerk aber, welches sorgfältiger und aus besserem Materiale construirt zu sein pflegt, mindestens gleich 200000 bis 300000 Kil. pro Quadratmeter annehmen.

Es wird freilich immer am besten sein, sich nicht auf diese ungefähren Angaben zu verlassen, sondern vor Beginn eines jeden größeren Brückenbaues ausführliche Proben über die Festigkeit des zu verwendenden Bausteines anzustellen.

Der Außenbogen des eigentlichen Gewölbes bestimmt sich auf die folgende Weise:

Nach den Voraussetzungen, worauf sich unsere ganze Berechnung stützt, muß der rechtwinklige Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen im Gewölbscheitel gleich $2/_3$ der dortigen Gewölbstärke sein, nämlich

$$\eta_0 - y_0 = 1\tfrac{1}{2} \cdot (Y_0 - y_0) = 1^m{,}245,$$

und es muß ferner für die Bruchfuge, wofür der Bruchwinkel bekanntlich gleich 60 Grad anzunehmen ist, der Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen nur gleich $1/_3$ der dortigen Gewölbstärke (beides rechtwinklig zum Innenbogen gemessen) sein. Demnach erhält man hinreichend genau durch Abmessung aus der Zeichnung die Gewölbstärke an der Bruchfuge, d. h. für $\alpha = 60$ Grad, gleich $1{,}4^m$, und es sind dadurch also 2 Punkte des Außenbogens, an der Scheitelfuge und Bruchfuge, festgestellt. Wenn man nun das, zwischen Scheitel- und Bruchfuge enthaltene, Stück des Innenbogens in beliebig viele gleiche Theile theilt, und die Differenz der Gewölbstärken an jenen beiden Fugen in ebenso viel Theile eintheilt, so kann man danach auf leichte Weise den Außenbogen so zeichnen, daß die Gewölbstärke von der Scheitelfuge nach der Bruchfuge zu gleichmäßig, und in demselben Verhältniß auch noch über die Bruchfuge hinaus wächst. In Fig. 1, Tafel I ist die Zeichnung vom Außenbogen des Gewölbes in dieser bezeichneten Weise ausgeführt *).

---

*) Carvallo construirt den Außenbogen des Gewölbes nach den Formeln 17 und 18, um für das unbelastete Gewölbe dieselbe Mittellinie des Druckes zu bekommen wie für das belastete; er vernachlässigt dadurch aber die gemachte Voraussetzung, daß die Gewölbstärke an der Stelle der Bruch-

§. 48.

Es sei die Zeichnung eines Widerlagers für das im vorigen Paragraphen betrachtete Beispiel auszuführen. Der angewandte Baustein sei ziemlich fest, nämlich sei die größte erlaubte Pressung pro Quadratmeter gleich 200000 Kil., und das Gewicht des Mauerwerkes nebst der dahinter liegenden Erde pro Cubikmeter gleich 2400 Kil. anzunehmen (welcher Werth freilich in den meisten Fällen zu groß sein wird und für gewöhnlich nur gleich 2000 Kil. zu setzen sein möchte).

Für den vorliegenden Fall hat sich aus der Tabelle ergeben:

Der Horizontalschub $P_0 = 65800$ Kil.

Das Gewicht des halben Gewölbes nebst Abdeckung

$$P_v = 109762 \text{ Kil.}$$

Die Ordinate der Mittellinie des Druckes für den Gewölbanfang, d. h. für $\alpha = 90^0$, auf die Horizontale $M_0 T$ in Fig. 1, Tafel I als Abscissenachse bezogen, $Y_0 - Y_n = 5^m,564$.

Man findet dann die Höhe Z_n des Punktes M_0 über der Basis OU des Widerlagers gleich:

$$Z_n = H_2 + Y_0 - (Y_0 - Y_n) = 26 + 0,83 + 8 - 5,564.$$
$$Z_n = 29^m,266.$$

Wenn man nun von der Bedingung ausgeht, daß das Widerlager an keiner Stelle überflüssig stark gemacht werden soll, d. h. daß die größte Pressung pro Flächeneinheit in jeder Horizontalschicht gleich P' sein soll, und wenn man zunächst den Druck der äußeren Erde gegen das Widerlager ganz vernachlässigt, so hat man zur Bestimmung des Außenbogens für das Widerlager von der Gleichung (26):

$$\eta_q = -\frac{P_v}{P' - \varrho \,.\, (H_3 - Z)} + \sqrt{\left(\frac{P_v}{P' - \varrho \,.\, (H_3 - Z)}\right)^2 + \frac{6 P_0 \,.\, (Z_n - Z)}{P' - \varrho \,.\, (H_3 - Z)}}$$

Gebrauch zu machen, worin bekanntlich die veränderliche Abscisse vom Außenbogen des Widerlagers durch Z, und die veränderliche Ordinate desselben durch η_q bezeichnet ist, beides auf die Abscissenachse OZ und die Ordinatenachse OU bezogen. Die Gleichung (26) gilt nur für den unteren Theil des Widerlagers, so weit die Mittellinie des Druckes in der äußeren Hälfte des Widerlagers liegt, nämlich bis zu einer Höhe Z', welche sich aus der Formel (28):

$$Z' = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{P'}{\varrho} - H_3 - Z_n\right) + \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\frac{P'}{\varrho} - H_3 - Z_n\right)^2 - \frac{P_v^2}{2 P_0 \cdot \varrho} + \left(\frac{P'}{\varrho} - H_3\right) . Z_n}$$

---

fuge gleich dem dreifachen Abstande der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen sein müsse, was allenfalls nur dann, wenn die Abdeckung des Gewölbes aus festem Mauerwerk (nicht aus Erde) besteht, erlaubt ist.

ergiebt, und zwar für unseren Fall bei Substitution der gegebenen Werthe für P', ϱ, H_3, Z_n, P_v und P_0, gleich:

$$Z' = 27^m,962.$$

Die zugehörige Ordinate des Außenbogens, was mit der Stärke des Widerlagers gleichbedeutend ist, folgt aus Gleichung (24):

$$\eta'_q = \frac{P_v}{P' - \varrho \cdot (H_3 - Z')} = 0^m,6241.$$

Wenn man in die Gleichung (26) der Reihe nach für Z den Werth von 4, 8, 12, 16, 20, 24 Meter substituirt und dafür die entsprechenden Werthe von η_q berechnet, so erhält man die letzteren resp. gleich: $8^m,299$; $7^m,286$; $6^m,304$; $5^m,266$; $4^m,282$; $2^m,936$. Nach derselben Gleichung bekommt man ferner für $Z = 0$ die Widerlagsstärke E an der Basis gleich:

$$E = 9^m,269.$$

Mit Hülfe der oben berechneten Ordinaten ist die schwach punktirte Curve im Widerlager, Fig. 1, Tafel I, gezeichnet, und es würde also diese Curve unter der Voraussetzung, daß gegen die äußere Fläche oder den Außenbogen des Widerlagers kein Seitendruck stattfindet, als die zweckmäßigste Form für diesen Außenbogen anzusehen sein, nämlich insofern, weil das Widerlager dadurch unter der genannten Voraussetzung auf seine geringsten zulässigen Stärken in jeder Horizontalschicht beschränkt ist. Wie man sieht, so wird diese Curve in ihrem unteren Theile nahezu eine gerade Linie, und hat überhaupt mit einer Hyperbel viele Aehnlichkeit.

Wenn das Widerlager an seiner äußeren Seite ganz frei stände, also niemals ein bedeutender Seitendruck von außen her gegen dasselbe eintreten könnte, so würde eine Bestimmung des Außenbogens in der oben angegebenen Weise genügen. Es liegt aber in unserem Fall ein Erddamm von derselben Höhe $H_3 = 38^m$ wie die ganze Brücke vor der äußeren Fläche des Widerlagers, und es würde demnach auch die Möglichkeit zu berücksichtigen sein, daß diese Erde ihre Cohäsion größtentheils oder fast ganz verliert und einen sehr bedeutenden Horizontaldruck von außen gegen das Widerlager ausübt. Dann muß man, wenn man die Bedingung festhält, daß das Widerlager an keiner Stelle mehr als die gerade erforderliche Stärke haben soll, zur Berechnung der Ordinaten für den Außenbogen die Gleichung (32) benutzen:

$$\eta_q = \frac{2P_v}{P' - \varrho \cdot (H_3 - Z)} +$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{2P_v}{P' - \varrho \cdot (H_3 - Z)}\right)^2 + \frac{\varrho \cdot (H_3 - Z)^3 \cdot tg^2(\frac{1}{2}\psi) - 6P_0 \cdot (Z_n - Z)}{P' - \varrho \cdot (H_3 - Z)}}.$$

Der Schüttungswinkel ψ (die Ergänzung des Böschungswinkels zu 90 Grad) sei für die vorkommende Erde nach angestellten Versuchen gleich 54 Grad anzunehmen. Die Werthe der übrigen constanten

Größen P', P_0, P_v, Z_n, ϱ in jener Gleichung sind schon bekannt. Man bekommt nun, indem man der Reihe nach für Z die Werthe von 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 Meter in die Gleichung (32) einsetzt, die zugehörigen Werthe für die Ordinate η_q des Außenbogens gleich: $13^m,081$; $10^m,009$; $7^m,3026$; $4^m,914$; $2^m,745$; $1^m,3194 + \sqrt{-0,4183}$; $2^m,749$. Hierunter hat derjenige Werth von η_q, welcher der Abscisse $Z = 24^m$ entspricht, nämlich $1^m,3194 + \sqrt{-0,4183}$, einen imaginairen Theil, woran man erkennt, daß die Gleichung (32) an dieser Stelle des Gewölbes nicht gültig ist, weil daselbst die Mittellinie des Druckes sich nicht der inneren Fläche des Widerlagers mehr nähert als der äußeren, wie doch bei Ableitung jener Gleichung vorausgesetzt wurde.

Nach der Gleichung (32) findet man ferner für $Z = Z_n$ die Widerlagsstärke am Punkte M_n:

$$\eta_{qn} = 3^m,280;$$

und für $Z = 0$ die Widerlagsstärke an der Basis OU gleich:

$$E = 16^m,583.$$

Die dick punktirte Curve im Widerlager in Fig. 1, Tafel **I** ist mit Hülfe dieser Berechnungen construirt und zeigt diejenige Form des Außenbogens, welche man gebrauchen müßte, wenn man den Druck der äußeren Erde berücksichtigt und die Bedingung beibehält, daß das Widerlager an allen Stellen nur die gerade erforderliche Stärke erhalten solle. Wie der Augenschein lehrt, so ist diese Curve gegen die Abscissenachse OZ zu stark convex gekrümmt und tritt an ihrem oberen und unteren Ende über die, unter Vernachlässigung des Erddruckes construirte, schwach punktirte Curve für den Außenbogen hinaus. Man hat nun, wenn man das Widerlager an keiner Stelle überflüssig stark machen will, für eine bestimmte Horizontalschicht von jenen beiden Curven diejenige als wirklichen Außenbogen zu wählen, welche an dieser Stelle am weitesten nach außen zu liegt, also die größte Widerlagsstärke giebt. Dann würde aber bei unserem Beispiel die äußere Fläche des Widerlagers stark concav gegen außen hin gebildet werden müssen und zwar mit dem oberen Ende überhängen, was sich für die Ausführung nicht wohl eignet. Man thut daher am besten, die Stärke des Widerlagers nur für dessen unteres und oberes Ende nach den obigen Formeln zu berechnen, nämlich:

$$\eta_{qn} = 3^m,280; \text{ und}$$

$$E = 16^m,583;$$

und dann die 2 so erhaltenen Punkte vom Außenbogen des Widerlagers durch eine gerade Linie zu verbinden, welche man zweckmäßiger in eine Reihe von stufenförmigen Absätzen verwandeln wird. Die Zeichnung des Widerlagers ist in Fig. 1, Tafel **I** auf diese Weise ausgeführt.

Wenn bei diesem Beispiel die Berechnung der verschiedenen

Ordinaten für die beiden Curven, welche die zweckmäßigste Form für den Außenbogen des Widerlagers bei Vernachlässigung oder bei Berücksichtigung des Erddruckes darstellen sollen, wirklich vorgenommen worden ist, so geschah dieses nur zur Verdeutlichung der ganzen Sache, aber es war durchaus nicht nothwendig, sondern die wirklich erforderlichen Rechnungen würden einfach aus dem Folgenden bestehen:

Für das untere Ende des Widerlagers ist es im Allgemeinen zweifelhaft, ob man bei Vernachlässigung oder bei Berücksichtigung des Erddruckes dafür die größte Stärke bekommt; man muß also zur Berechnung von E sowohl die Formel (29):

$$E = -\frac{P_v}{P' - \varrho . H_3} + \sqrt{\left(\frac{P_v}{P' - \varrho . H_3}\right)^2 + \frac{6 P_0 . Z_n}{P' - \varrho . H_3}}$$

als auch die Formel (33):

$$E = \frac{2 P_v}{P' - \varrho . H_3} + \sqrt{\left(\frac{2 P_v}{P' - \varrho . H_3}\right)^2 + \frac{\varrho . H_3^3 . tg^2 (\frac{1}{2}\psi) - 6 P_0 . Z_n}{P' - \varrho . H_3}}$$

benutzen. Für unser Beispiel giebt die erstere Formel $E = 9^m,269$, die zweite $E = 16^m,583$, wovon man natürlicherweise den größeren Werth, also

$$E = 16^m,583$$

wirklich anzunehmen hat. Für das obere Ende des Widerlagers weiß man bereits, daß man dafür unter Berücksichtigung des Erddruckes immer die größte Stärke berechnet; dann hat man zur Bestimmung der Widerlagsstärke für die Höhe Z_n über der Basis die Gleichung (35):

$$\eta_{qn} = \frac{2 P_v}{P' - \varrho . (H_3 - Z_n)} + \sqrt{\left(\frac{2 P_v}{P' - \varrho . (H_3 - Z_n)}\right)^2 + \frac{\varrho . (H_3 - Z_n)^3 . tg^2 (\frac{1}{2}\psi)}{P' - \varrho . (H_3 - Z_n)}}$$

anzuwenden, woraus sich

$$\eta_{qn} = 3^m,280$$

ergiebt. Wie man nun die beiden so bestimmten Punkte vom Außenbogen des Widerlagers an dessen oberem und unterem Ende durch eine Reihe von gleichmäßigen stufenförmigen Absätzen zu verbinden hat, ist bereits im Obigen beschrieben worden und auch aus der Zeichnung hinreichend deutlich zu ersehen. Von dem obersten Punkte dieses Außenbogens, welchen man etwa in der Höhe Z_n über der Basis, also in gleicher Höhe mit dem Angriffspunkte M_n des Gewölbschubes am Widerlager anzunehmen hat, wird dann eine Tangente an den Außenbogen des Gewölbes gelegt, welche die obere Fläche des Widerlagers bildet.

Man sieht aus dem Voranstehenden, daß die Berechnung der erforderlichen Dimensionen eines Widerlagers immer auf kurze und einfache Weise vorzunehmen ist, nämlich allein in einer Anwendung

der 3 Gleichungen 29, 32 und 35 auf die vorliegenden Beispiele beruht *).

§. 49.

Es seien für den Viaduct von Bouzanne, also für das in den beiden vorigen Paragraphen betrachtete Beispiel, die erforderlichen Dimensionen eines Mittelpfeilers zu bestimmen, dessen Seitenflächen als geradlinige Dossirungen gebildet werden sollen.

Die rückwirkende Festigkeit des Materiales, welche in Anspruch genommen werden darf, sei hier wieder $P' = 200000$ Kil. pro Quadratmeter anzunehmen. Dann ergiebt sich die erforderliche Stärke des Mittelpfeilers an seinem oberen Ende, d. h. am Gewölbanfang, aus Gleichung (23):

$$l = \frac{P}{P' - \varrho \,.\, H_1},$$

worin P das doppelte Gewicht eines halben Gewölbes nebst Abdeckung, und H_1 die Höhe der Gewölb-Abdeckung über Gewölbanfang bezeichnet, nämlich:

$$P \;= 2\,P_v = 219524 \text{ Kil., und}$$
$$H_1 = r + h = 12^m.$$

Da ferner von uns die Dichtigkeit des Mauerwerkes $\varrho = 2400$ Kil. pro Cubikmeter angesetzt worden ist, so ergiebt sich aus der obigen Gleichung:

$$l = 1{,}28^m.$$

Für die nöthige Stärke l_1 des Mittelpfeilers an seinem unteren Ende giebt die Gleichung (24):

$$l_1 = l \,.\, \left(\frac{P' + \varrho \cdot \frac{H_2}{2}}{P' - \varrho \cdot \frac{H_2}{2}}\right),$$

worin H_2 die Höhe des Pfeilers von seiner Basis bis zu Gewölbanfang $= 26^m$ bezeichnet, durch Substitution der entsprechenden Werthe für ϱ, P' und l:

$$l_1 = 1{,}75^m.$$

Die so berechneten Stärken l und l_1 der Mittelpfeiler am oberen und unteren Ende möchten jedoch in Praxis etwas zu schwach erscheinen, weil die Pfeiler so construirt werden müssen, daß sie auch jede vorkommende zufällige Belastung der Brücke ertragen können und auch dem etwa möglichen einseitigen Schub von einem der Gewölbe wirksamen Widerstand entgegenzusetzen vermögen. Daher würde man bei

---

*) Carvallo berechnet nach seinen unrichtigen Formeln, und zwar unter der Annahme von $P' = 100000$ Kil., die Widerlagsstärke an der Basis $E = 9^m{,}070$, was jedenfalls viel zu schwach ist.

der Ausführung gut thun, die oben berechneten Werthe von l und l_1 mindestens zu verdoppeln. Uebrigens ist aus den Resultaten unserer Berechnung zu ersehen, wie schlank verhältnißmäßig ein Mittelpfeiler, welcher die Last eines nicht unbeträchtlichen Gewölbes zu tragen hat, allenfalls sein darf.

§. 50.

Zweites Beispiel.

Es sei die Mittellinie des Druckes und die Form des Außenbogens für das Halbkreisgewölbe eines Aquaductes von 4^m Spannweite zu bestimmen, welches einen Erddamm von 16^m Höhe über dem Scheitel des Innenbogens zu tragen hat. Die Dichtigkeit dieser Erdmasse möge nur 1800 Kil. pro Cubikmeter betragen, und man wird daher, um unsere Tabelle (bei deren Berechnung bekanntlich $\varrho = 2400$ Kil. angenommen wurde) mit annähernder Genauigkeit auch auf diesen Fall anwenden zu können, anstatt der wirklichen Höhe der Belastung von 16^m nur eine Höhe

$$h = \frac{1800}{2400} \cdot 16 = 12^m$$

anzunehmen haben.

Es ist hier zu bemerken, daß der Erddamm zu beiden Seiten mit einer Böschung auf die Gewölbstirn herabfällt; folglich gilt die größte Höhe der Belastung von 12^m nur für den mittleren Theil des Gewölbes, soweit derselbe senkrecht unter der Krone des Erddammes liegt. Von da an nach beiden Gewölbstirnen zu wird aber die Höhe der Belastung immer geringer, und reducirt sich zuletzt fast nur auf die eigentliche Gewölbstärke, oder etwa auf 1^m. Es muß sich daher empfehlen, dem mittleren Theil des Gewölbes, soweit dasselbe unter der Dammkrone liegt, eine gewisse größte Gewölbstärke im Scheitel, welche sich nämlich in unserer Tabelle für die Höhe der Belastung $h = 12_m$ findet, zu geben, und von da an nach beiden Seiten hin diese Gewölbstärke gleichmäßig bis nach den Gewölbstirnen, wo dieselbe noch etwa der Belastung von 1^m entsprechen muß, abnehmen zu lassen.

Die Ausführung der nöthigen Rechnungen würde bei diesem Beispiele gerade so vorzunehmen sein wie bei dem vorigen, und darf also wohl unterbleiben.

§. 51.

Drittes Beispiel.

Es seien die erforderlichen Dimensionen für ein Gewölbe, dessen Innenbogen die Form eines Kreissegmentes hat, zu bestimmen, wenn das Folgende gegeben ist:

$$r = 8^m{,}50.$$
$$h = 1^m{,}20.$$
$$H_2 = 4^m{,}205.$$
$$H_3 = 6^m{,}405.$$
$$h_1 = 7^m{,}50.$$
$$\alpha_n = 28^0\ 4'.$$

Diese gegebenen Maßen sind derartig, daß unsere Tabelle für den vorliegenden Fall nicht genau paßt, besonders deshalb, weil das Gewölbe so flach ist, daß sein halber Centriwinkel bedeutend kleiner als 60^0 ist; es wird also bei diesem Beispiel die Bruchfuge am Gewölbanfang liegen müssen, während unsere Tabelle bekanntlich auf die Voraussetzung, daß der Bruchwinkel immer annähernd gleich 60^0 sei, begründet ist. Daher wird es in diesem Fall das Beste sein, vom Gebrauch der Tabelle ganz abzusehen, und die Rechnung in ähnlicher Weise, wie solches bereits beispielsweise in §. 40 geschehen, von vorn an ganz durchzuführen.

Da das betrachtete Gewölbe ein Kreissegment zum Innenbogen hat, so muß man von Gleichung (43) Gebrauch machen und zunächst von der darin vorkommenden Parenthese

$$\left(\frac{H + h_1}{r} \cdot \frac{sin^2 \alpha}{2} - \frac{\alpha \,.\, sin\, \alpha}{2} - \frac{cos\, \alpha}{2} + \frac{cos^3 \alpha}{6} + \tfrac{1}{3}\right)$$

die verschiedenen Werthe für $\alpha = 9^0$, 18^0, 27^0 und $\alpha_n = 28^0\ 4'$ entwickeln, was mit Hülfe der kleinen Tabelle in §. 37 leicht ausführbar ist und die folgenden Resultate ergiebt:

Werth von α.	Werth der Parenthese.
9 Grad.	+ 0,00175
18 „	+ 0,00712
27 „	+ 0,0164
27 „ 4 Min.	+ 0,0180

Nach der Perronet'schen Formel

$$\eta_0 - y_0 = 9{,}0347 \,.\, W + 0{,}325^m$$

hat man nun eine vorläufige Annahme für die Gewölbdicke im Scheitel zu machen; da die Spannweite des Gewölbes $W = 8^m$ gegeben ist, so wird die erste Annahme für:

$$\eta_0 - y_0 = 0^m{,}6026,$$

und für $Y_0 = y_0 + \tfrac{2}{3}\,(\eta_0 - y_0)$:

$$Y_0 = 1^m{,}4017.$$

Wenn aber die Bruchfuge wirklich am Gewölbanfang liegen soll, so muß für $\alpha = \alpha_n$ der entsprechende Werth der obigen Parenthese,

getheilt durch $Y_0 - y$, ein Maximum werden, was annähernd genau der Fall sein wird, wenn der bezeichnete Ausdruck für $\alpha = 27^0$ und $\alpha = 28^0\ 4'$ gleiche Werthe annimmt. Nach der obigen kleinen Tabelle ist der Werth der Parenthese:

Für $\alpha = 27^0, \quad A = 0{,}0164;$
" $\;$ " $= 28^0\ 4', \; B = 0{,}0180.$

Ferner ist der Werth von $Y_0 - y = Y_0 + h_1 - r \, . \cos \alpha$ zu berechnen:

Für $\alpha = 27^0, \quad a = 1{,}3282;$
" $\;$ " $= 28^0\ 4', \; b = 1{,}4017.$

Demnach folgt aus Gleichung (47):

$$\delta_1 = 0^m{,}0125.$$

Wenn man die erste Annahme für Y_0 um diesen Fehler δ_1 vergrößert hat, so erhält man die berichtigten Werthe von:

$$Y_0 = 1^m{,}4142.$$
$$\eta_0 - y_0 = 1^m{,}6213.$$

Für die Ordinate Y_m der Mittellinie des Druckes in der Anfänger-Fuge findet man mit Berücksichtigung des Umstandes, daß $y_m = 0$ ist, nach der Formel (A) des §. 18 den folgenden Werth:

$$Y_m = 0^m{,}2071.$$

Um nun die Größe des Horizontalschubes P_0 aus der Gleichung

$$P_0 = \frac{\varrho \cdot \psi\,(X_m)}{Y_0 - Y_m}$$

zu bestimmen, kann man für dieses Beispiel, weil bei dem Segmentbogen die Richtung der Fugen nur wenig von der Horizontalen abweicht, ohne Weiteres $x_m = 4^m$ für X_m, oder α_m für α_x substituiren; dann erhält man, weil bekanntlich

$$\psi\,(x_m) = r^3 . \left(\frac{H + h_1}{r} \cdot \frac{\sin^2 \alpha_x}{2} - \frac{\alpha_x \, . \sin \alpha_x}{2} - \frac{\cos \alpha_x}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos^3 \alpha_x}{6} + \frac{1}{3} \right)$$

ist, und wenn man ferner ϱ wieder $= 2400$ Kil. annimmt, nach der obigen Gleichung, worin der Werth der Parenthese gleich 0,0180 schon aus der kleinen Tabelle dieses Paragraphen bekannt ist:

$$P_0 = 21978 \text{ Kil.}$$

Die größte Pressung pro Flächeneinheit findet man aus der Gleichung:

$$P' = \frac{4}{3} \cdot \frac{P_0}{Y_0 - y_0} = 70750^k,$$

welche Pressung vollkommen zulässig ist und noch erhebliche Sicherheit gewährt.

Das Gewicht P_v des halben Gewölbes ergiebt sich aus Gleichung (42):

$$P_v = \varrho \cdot r^2 \cdot \left(\frac{H + h_1}{r} \cdot \sin \alpha_n - \frac{\alpha_n}{2} - \frac{\sin \alpha_n \cdot \cos \alpha_n}{2} \right) = 14635^k.$$

Die Ordinaten der Mittellinie des Druckes, welche den Theilpunkten des Innenbogens entsprechen, ergeben sich mit Hülfe der kleinen Tabelle dieses Paragraphen aus der Gleichung (43):

Winkel α.	Ordinate $Y_0 - Y$.
9 Grad	$0^m,11725$
18 „	$0^m,47604$
27 „	$1^m,0988$
28 „ 4 Min.	$1^m,2060$

Hiernach ist die Zeichnung in Fig. 2, Tafel I ausgeführt. Zur Construction des Außenbogens ist die Gewölbstärke am Gewölbanfang gleich dem dreifachen Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen bestimmt und angenommen, daß von der Schlußfuge bis zur Anfängerfuge die Gewölbstärke gleichmäßig wachse. *)

§. 52.

Für das Beispiel des vorigen Paragraphen sei das Widerlager zu construiren.

Die Höhe Z_n vom Angriffspunkte M_n des Gewölbschubes am Widerlager ist:

$$Z_n = H_2 + Y_0 - (Y_0 - Y_n) = 4^m,4132.$$

Die erforderliche Stärke des Widerlagers an seinem oberen Ende, d. h. in derjenigen Horizontalen, worin der Punkt M_n liegt, erhält man bei Berücksichtigung des Erddruckes, nämlich aus der Formel (35), wenn man für das Widerlager $\varrho = 2400^k$, $P' = 100000^k$ pro Quadratmeter und $\psi = 54^0$ annimmt, gleich:

$$\eta_{q\,n} = 1^m,0896.$$

Für die Stärke E des Widerlagers an seiner Basis giebt die Formel (33) einen imaginären Werth, also ist dieselbe für diesen Fall nicht brauchbar; dagegen erhält man nach der Formel (29), welche auf alleinige Berücksichtigung des Gewölbschubes und Vernachlässigung des Erddruckes begründet ist:

$$E = 2^m,812.$$

*) Carvallo findet für das obige Beispiel, aber ohne anzugeben auf welche Weise, die Gewölbstärke im Scheitel gleich $0^m,795$ und $Y_0 - Y = 0^m,74$, was einen Anspruch auf Richtigkeit wohl nicht machen darf.

Diese beiden berechneten Werthe für E und η_{qn} würden sofort zur Construction des Widerlagers brauchbar sein, wenn nicht bei diesem Beispiele, wo wir es mit einem sehr flachen Gewölbe zu thun haben, der seltene Fall vorläge, daß auch die Stabilität des Widerlagers in Bezug auf die Möglichkeit eines Gleitens auf den Horizontalfugen in Frage kommt. Durch Umsetzung der Ungleichung (30) erhält man nämlich, wenn man den Coefficienten f für die Reibung vom Stein auf Stein gleich 1 setzt:

$$\eta_{qn} > \frac{P_0 - P_v}{\varrho \cdot (H_3 - Z_n)},$$

oder ausgerechnet:

$$\eta_{qn} > 1^m,515.$$

Man bekommt also bei diesem Beispiel unter Berücksichtigung der Reibung den größten Werth für die Stärke des Widerlagers η_{qn} an seinem oberen Ende, und man würde diese Stärke zur Sicherheit noch etwas größer anzunehmen, und auch den oben berechneten Werth für E etwas zu vergrößern haben, vielleicht:

$$\eta_{qn} = 2^m.$$
$$E = 3^m,5.$$

Die Zeichnung des Widerlagers ist hiernach in Fig. 2, Tafel I ausgeführt. Es versteht sich von selbst, daß unter diesen Umständen der größte Druck P' pro Flächeneinheit im Widerlager bei Weitem nicht die äußerste erlaubte Grenze von 100000^k pro Quadratmeter erreichen wird, und daß mithin das Widerlager in dieser Hinsicht einen bedeutenden Ueberschuß an Stabilität besitzen wird *).

§. 53.

Viertes Beispiel.

Es sei die Mittellinie des Druckes und die Form des Außenbogens für ein Gewölbe zu bestimmen, dessen Innenbogen eine halbe Ellipse bildet, wenn dafür die folgenden Dimensionen gegeben sind:

$$a = 4^m.$$
$$b = 2^m.$$
$$h = 2^m.$$
$$H = 4^m.$$
$$H_2 = 5^m.$$
$$H_3 = 9^m.$$

Ferner sei die Dichtigkeit ϱ des Steines wieder gleich 2400^k pro Cubikmeter anzunehmen.

Nach den Bemerkungen des §. 43 suchen wir zuerst in unserer

---

*) Carvallo findet $\eta_{qn} = 3^m,1245$ und $E = 4^m,3245$.

Tabelle den Werth für $Y_0 - y_0$, welcher einem Radius $a = 4^m$ und einer Belastungshöhe $h = 2^m$ entsprechen würde, nämlich:

$$Y_0 - y_0 = 0^m,448.$$

Bezogen auf die Abscissen der 10 Theilpunkte eines Viertelkreises, welchen man über der halben großen Achse a als Radius beschreibt, finden sich nun die 10 Ordinaten $Y_{0\varepsilon} - Y_\varepsilon$ der Mittellinie des Druckes aus der Tabelle für den Radius $= 2^m$ so, wie dieselben in Fig. 3, Tafel I eingeschrieben sind.

Ferner findet man aus derselben Tabelle $P_{0c} = 9500^k$, also

$$P_{0\varepsilon} = \frac{a^2}{b^2} \cdot P_{0c} = 4 \cdot 9500, \text{ oder}$$

$$P_{0\varepsilon} = 38000^k.$$

Nach der Gleichung

$$\frac{P'_\varepsilon}{P'_c} \cdot \frac{Y_{0\varepsilon} - b}{Y_{0c} - b} = \frac{a^2}{b^2}$$

erhält man, da in der Tabelle $P'_c = 42600^k$ und $Y_{0c} - b = 0^m,296$ gegeben ist:

$$P'_\varepsilon = 112592^k,$$

was noch sehr wohl zulässig ist.

Endlich giebt die Tabelle $P_{vb} = 11660^k$, mithin wird nach Formel $P_{v\varepsilon} = \frac{a}{b} \cdot P_{vc}$:

$$P_{v\varepsilon} = 23320^k.$$

Die Construction des Außenbogens findet auf bekannte Weise statt, indem man an derjenigen Stelle der Ellipse, welche zwischen den beiden Ordinaten 0,878 und 1,073, die den Werthen 54^0 und 63^0 von α entsprechen, liegt, die Gewölbstärke gleich dem dreifachen Abstand der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen macht, und dieselbe von der Schlußfuge an bis nach dieser Stelle hin gleichmäßig wachsen läßt. Die Ausführung der Zeichnung findet sich in Fig. 3, Tafel I.

§. 54.

Für das im vorigen Paragraphen betrachtete Beispiel sei das Widerlager zu construiren. Es sei dabei vorausgesetzt, daß das Widerlager aus Material von geringer Festigkeit hergestellt werde, wofür die größte zulässige Pressung P' pro Quadratmeter nur gleich 100000^k angesetzt werden darf *). Wie früher sei auch hier $\varrho = 2400^k$ und $\psi = 54^0$ anzunehmen.

---

*) Bei kleineren Brücken, wo zufällige Belastungen und Erschütterungen ꝛc. verhältnißmäßig von bedeutend mehr Einfluß sind als bei den größeren Brücken, thut man der Sicherheit wegen überhaupt gut, die größte zulässige Pressung P' höchstens $= 100000^k$ anzunehmen.

Zunächst muß man Z_n bestimmen:

$$Z_n = H_2 + b + 0{,}448 - 1{,}369, \text{ also}$$

$$Z_n = 6^m{,}079.$$

Es findet sich nun die erforderliche Stärke des Widerlagers am oberen Ende nach Formel (35) gleich:

$$\eta_{qn} = 1^m{,}1491.$$

Die Formel (33) ist zur Berechnung der Widerlagsstärke an der Basis wiederum nicht brauchbar, was man daran erkennt, daß sie dafür einen imaginären Werth giebt; nach der Gleichung (29) erhält man dagegen:

$$E = 3^m{,}917.$$

Weil das betrachtete Gewölbe ein ziemlich flaches ist, so muß man auch noch die Stabilität des Widerlagers an seinem oberen Ende in Bezug auf das Gleiten untersuchen; man bekommt dann, wenn man den Reibungs-Coefficienten f gleich 1 annimmt, nach der im §. 52 erwähnten Ungleichung für dieses Beispiel:

$$\eta_{qn} > 2^m{,}09.$$

Man sieht, also, daß man in diesem Fall ebenfalls wieder durch die Berücksichtigung einer Möglichkeit des Gleitens den größten Werth für die Widerlagsstärke η_{qn} am oberen Ende berechnet. In Wirklichkeit wird freilich die Gefahr des Gleitens für das Widerlager nicht so groß sein, wie unsere Rechnung es angiebt, weil das eigentliche Gewölbe mit seinen schräg liegenden Fugen noch ziemlich tief in die Masse, welche wir nur als Widerlager mit durchlaufenden Horizontalfugen betrachtet haben, eingreift, und daher die nach außen schiebende Kraft P_0, der Gewölbschub, eigentlich erst in der Nähe des Gewölbanfanges wirksam gegen das Widerlager auftreten kann. Es wird also genügen, wenn man die folgenden Maße annimmt:

$$\eta_{qn} = 2^m, \text{ und}$$
$$E = 4^m,$$

wonach die Zeichnung des Widerlagers in Fig. 3, Tafel I ausgeführt ist *).

Daß das äußere Ende der Horizontalen, welche durch den Angriffspunkt M_n des Gewölbschubes geht und worauf die Widerlagsstärke η_{qn} sich bezieht, durch eine Tangente mit dem Außenbogen des Gewölbes zu verbinden sein wird, ist bereits bekannt und auch aus der Zeichnung zu ersehen.

§. 55.

Es sei die gleichmäßige Dicke E_1 eines Pfeilers mit senkrechten

*) Carvallo bestimmt für dieses Beispiel nach seinen unrichtigen Formeln $\eta_{qn} = 2^m{,}727$ und $E = 4^m{,}287$.

Seitenwänden zu bestimmen, welcher 2 ungleiche Gewölbe zu tragen hat, wovon das größere das in den beiden vorigen Paragraphen betrachtete elliptische Gewölbe, und das kleinere ein Halbkreisgewölbe von 2^m Radius ist. Die Dichtigkeit ϱ des Pfeilers sei $= 2400^k$ pro Cubikmeter und die größte zulässige Pressung P' gleich 100000^k pro Quadratmeter anzunehmen; ferner sei gegeben für das größere Gewölbe:

$$P_0 = 38000^k,$$
$$P_v = 23320^k,$$
$$Z_0 = 6^m,079;$$

und für das kleinere Gewölbe:

$$p_0 = 9500^k,$$
$$p_v = 11660^k,$$
$$Z_0 = 5^m,927.$$

Diese Bezeichnungen sind die im §. 30 angewandten. Nach der Formel (37) desselben Paragraphen erhält man durch einfache Rechnung:

$$E_1 = 3^m,656.$$

Danach ist die Zeichnung in Fig. 4, Tafel I ausgeführt *).

Anhang.

§. 56.

Die Abhandlung von Carvallo über Gewölbtheorie, wovon diese Schrift eine freie Bearbeitung bilden soll, ist in den vorstehenden 6 Kapiteln zwar nicht in wörtlicher Uebersetzung, aber doch möglichst getreu ihrem ganzen Inhalte nach wiedergegeben, und es ist hier nur an denjenigen Stellen Neues hinzugefügt, wo nähere Erklärungen nothwendig schienen oder wo unnöthige Weitläufigkeiten und Irrthümer der Carvallo'schen Arbeit zu vermeiden waren. Es dürfte hier in einem Anhange aber wohl der Ort sein, auf einige Abänderungen hinzudeuten, welche vielleicht zweckmäßigerweise bei den im Obigen gegebenen Betrachtungen angebracht werden könnten, theils in der Absicht um den Betrachtungsgang zu vereinfachen und deutlicher zu machen, theils auch um die erlangten Resultate selbst dergestalt zu

---

*) Carvallo findet $E_1 = 4^m,054$.
Von 2 anderen Beispielen, welche Carvallo noch durchrechnet, bietet das erste nichts Neues; bei dem letzten, wo das betrachtete Gewölbe einen Spitzbogen bildet, sind die angewandten Formeln unrichtig, und es braucht wohl überhaupt diese Gewölbform wegen ihrer Seltenheit bei neueren Bau-Ausführungen hier nicht speciell betrachtet zu werden.

ändern, daß dieselben für die Praxis brauchbarer werden, als es z. B. die von Carvallo berechnete Tabelle für Gewölbe von großen Spannweiten ist. Es muß jedoch die Frage, ob die im Folgenden vorgeschlagenen Abänderungen wirklich Verbesserungen zu nennen sein würden, dem Urtheil competenter Richter vorbehalten bleiben.

§. 57.

Die Untersuchungen der ganzen Abhandlung sind auf die Voraussetzung begründet, daß man bei Ableitung der Gleichung für die Mittellinie des Druckes, ohne einen bedeutenden Fehler zu begehen, die Richtung der sämmtlichen Gewölbfugen als vertikal ansehen dürfe. Obgleich nun die danach berechneten Resultate manchmal nicht unwesentlich von der Wahrheit abweichen, so gewährt doch diese Voraussetzung jedenfalls immer erhebliche Vortheile, indem die Rechnungen dadurch sehr einfach gemacht werden und die begangenen Fehler für die Stabilität der Gewölbe in der Weise günstig zu nennen sind, daß die hiernach berechneten Gewölbstärken immer etwas zu groß ausfallen. Auch ist bei den mit einer Abdeckung von Mauerwerk oder Erdschüttung versehenen Gewölben, welche in der Praxis am häufigsten vorkommen und deshalb hier insbesondere betrachtet werden, über die Art und Weise, wie sich die Last der Abdeckung auf das eigentliche Gewölbe vertheilt, nichts Näheres bekannt und es scheinen dabei allerlei Zufälligkeiten, welche unmöglich alle in der Rechnung berücksichtigt werden können, von Einfluß zu sein, so daß eine völlig zutreffende Gewölbtheorie sich überhaupt nicht wohl aufstellen läßt und möglichst einfache Voraussetzungen in vieler Hinsicht als die vortheilhaftesten erscheinen müssen.

Um die Mehrzahl der in den Paragraphen 4 bis 10 des ersten Kapitels durch Rechnung gefundenen Sätze abzuleiten, war es unnöthig, dabei von der genannten Voraussetzung vertikaler Gewölbfugen auszugehen, weil dieselben sich durch bloßes Raisonnement auf eine klare und einfache Weise und in völliger Allgemeinheit entwickeln lassen, wie dem Leser dieser Schrift wohl als bekannt vorausgesetzt werden darf. Sie ergeben sich bei einigem Nachdenken in der nachstehenden Reihenfolge eigentlich mehr oder weniger von selbst.

Für einen gegebenen Innenbogen lassen sich unendlich viel verschiedene stabile Gewölbe construiren, weil zur Stabilität nur erforderlich ist, daß die Mittellinie des Druckes an allen Stellen innerhalb der Gewölbfläche liege, sofern die rückwirkende Festigkeit des Materiales dadurch nicht übermäßig in Anspruch genommen wird.

Diejenige Kraft, wodurch man sich eine Hälfte eines symmetrischen Gewölbes ersetzt denken darf, muß eine Horizontalkraft sein und wird der Gewölbschub genannt; sie greift im Gewölbscheitel an und die Resultante der Pressungen für eine beliebige Gewölbfuge setzt sich aus diesem Gewölbschub und dem Gewicht des oberen Gewölbstückes, welches

zwischen jener betrachteten Fuge und dem Gewölbscheitel enthalten ist, zusammen. Demzufolge ist für alle Gewölbfugen die horizontale Componente von der Resultante der Pressungen gleich dem Gewölbschub, also constant, und die vertikale Componente gleich dem Gewicht des oberhalb der betrachteten Fuge liegenden Gewölbstückes.

Das Moment des Gewölbschubes in Bezug auf den zur Mittellinie des Druckes gehörigen Angriffspunkt der Resultante der Pressungen in einer beliebigen Fuge ist gleich dem Moment vom Gewichte des oberhalb dieser Fuge liegenden Gewölbstückes in Bezug auf denselben Punkt.

Wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt und das Material vorläufig als absolut hart ansieht, d. h. seine rückwirkende Festigkeit unendlich groß annimmt, so muß in einem stabilen Gewölbe der Horizontalschub im Gewölbscheitel so groß sein, daß in derjenigen Fuge, worin das Gewölbe am meisten zum Bruch geneigt ist, nämlich in der sogenannten Bruchfuge, die Mittellinie des Druckes den Innenbogen nur gerade berührt, aber nicht darüber hinausgeht; dann muß in Bezug auf die untere Kante dieser Fuge das Moment vom Gewichte des oberen Gewölbstückes gleich dem Momente des Horizontalschubes im Gewölbscheitel sein. Man bestimmt nun entweder durch Probiren oder mit Hülfe der Differentialrechnung die Lage der Bruchfuge auf die Weise, daß man diejenige Fuge sucht, wofür der Gewölbschub einen größten Werth annimmt, um der oben genannten Bedingung genügen zu können. Ueber den Angriffspunkt des Gewölbschubes in der Scheitelfuge muß dabei natürlicherweise schon im Voraus eine geeignete Annahme, welche auf Erfahrungen begründet ist, gemacht werden; wenn das Material als absolut hart vorausgesetzt werden darf, so hat man bei allen halbkreisförmigen und gedrückten Bögen anzunehmen, daß der Angriffspunkt des Gewölbschubes in der oberen Kante der Scheitelfuge liege. Daraus ergiebt sich also die Lage der Bruchfuge und die Größe des Gewölbschubes. Um die Stabilität des Gewölbes vollständig zu prüfen, muß man nun untersuchen, ob die Mittellinie des Druckes an keiner Stelle weder den Außenbogen des Gewölbes noch die äußere Fläche des Widerlagers überschreiten werde, weil sonst an der betreffenden Stelle eine Bruchfuge sich bilden und die darüber liegenden Theile um die äußere Kante dieser Fuge sich drehen und so den Einsturz des Gewölbes veranlassen würden. Dieses ist im Wesentlichen, wenn auch in etwas anderer Ausdrucksweise als in der von Coulomb gegebenen, der Hauptinhalt der berühmten Coulomb'schen Gewölbtheorie, welche auch der hier vorliegenden Arbeit von Carvallo als Grundlage dient.

Die folgenden in den Paragraphen 10 bis 13 des ersten Kapitels abgeleiteten Sätze sind eigentlich nur unter der Voraussetzung vertikaler Gewölbfugen mathematisch richtig und sind daher für die in der Praxis vorkommenden Gewölbe, wobei die Gewölbfugen immer normal auf dem Innenbogen zu stehen pflegen, nur als annähernd richtig anzu-

sehen. Von diesen Sätzen sind nur die nachstehenden zwei für uns von Wichtigkeit:

In einem mit Abdeckung versehenen Gewölbe ist die Mittellinie des Druckes vom Außenbogen des eigentlichen Gewölbes ganz unabhängig, wenn man die Dichtigkeit der Abdeckung gleich derjenigen der Gewölbsteine annehmen darf.

Die Horizontale durch den Angriffspunkt des Gewölbschubes in der Scheitelfuge, ferner 2 Tangenten an die zur vertikalen Bruchfuge gehörigen Punkte des Innenbogens und der Mittellinie des Druckes, und endlich die Vertikale durch den Schwerpunkt des oberen Gewölbstückes schneiden einander in demselben Punkte.

§. 58.

Da das Material der Gewölbsteine unter keinen Umständen als absolut hart angesehen werden kann, so darf bei einem stabilen Gewölbe die Mittellinie des Druckes weder den Innen- noch den Außenbogen an irgend einer Stelle berühren, weil daselbst sonst die Pressung pro Flächeneinheit an der Kante der Fuge unendlich groß und der Stein folglich zerdrückt werden würde. Weil nun über die Art der Vertheilung des Druckes in den Flächen der Fugen noch kein Naturgesetz bekannt ist, so thut man am besten, die darüber aufgestellte Navier'sche Hypothese, welche zugleich die einfachste und natürlichste ist und sich der Wahrheit ziemlich anzunähern scheint, zu benutzen. Dieselbe ist in §. 15 näher auseinandergesetzt und Formeln danach entwickelt; sie läßt sich zur weiteren Ausbildung der Coulomb'schen Gewölbtheorie mit besonderem Vortheil in der Weise, wie es in §. 18 geschehen, anwenden. Die dabei gemachte Annahme, daß die Pressung an der inneren Kante der Scheitelfuge und an der äußeren Kante der Bruchfuge nicht negativ, sondern nur gleich 0 sein soll, läßt sich namentlich durch den Umstand motiviren, daß in den meisten Fällen durch die Cohäsion des Mörtels das Oeffnen der Fugen, welches sonst durch einen negativen Druck an der Kante veranlaßt werden müßte, verhindert wird.

Die Gleichung (V) in §. 17 ist von unbequemer Form und zugleich nur annähernd richtig, wie aus der ziemlich mangelhaften Ableitung derselben hervorgeht. Man gelangt nun durch die folgende Betrachtung zu einem einfacheren und genaueren Resultate:

An der Stelle der Bruchfuge, welche hier als normal zum Innenbogen vorausgesetzt wird, muß die Mittellinie des Druckes annähernd parallel zum Innenbogen sein, weil sie sich demselben an dieser Stelle am meisten nähert (verhältnißmäßig zur Gewölbstärke, welche aber nur ganz allmälig wächst); man kann also $y'_m = Y'_m$ setzen oder

$$\text{(V).} \quad (1 + y'^2_m)^{\frac{1}{2}} = (1 + Y'^2_m)^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn man nun diese Gleichung mit den Formeln **I, II, VII**

und VIII der Paragraphen 17 und 18 Glied für Glied multiplicirt und dann zusammenzieht, so erhält man anstatt der ungemein weitläufigen Formel (A) des §. 18 jetzt den überraschend einfachen Ausdruck:

$$(A).\quad Y_m - y_m = \tfrac{1}{2}\,(Y_0 - y_0).$$

Es ist einleuchtend, wie sehr durch eine solche Vereinfachung die Rechnung erleichtert werden wird.

Ueber den Inhalt des dritten und vierten Kapitels ist hier im Anhang nichts Besonderes zu sagen.

§. 59.

Im §. 38 des fünften Kapitels wird nach der bekannten empirischen Formel von Perronet:

$$\eta_0 - y_0 = 0{,}0347\,.\,W + 0^m{,}325,$$

welche bei größeren Gewölben meistens zu große Gewölbstärken giebt, eine vorläufige Annahme über die Gewölbstärke im Scheitel gemacht und dann mit Hülfe der Voraussetzung verbessert, daß der Bruchwinkel etwa gleich 60^0 sein soll, so zwar, daß die vertikalen Abstände der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen für $\alpha = 54^0$ und $\alpha = 63^0$ einander gleich sein sollen. Dieser ganze Betrachtungsgang, wonach auch die am Schluß dieses Buches mitgetheilte große Tabelle berechnet ist, muß einigermaßen gewagt genannt werden; er führt zu ziemlich umständlichen Rechnungen und zu Resultaten, welche dem Praktiker häufig nicht als brauchbar erscheinen möchten, weil die danach berechneten Gewölbstärken bei den Gewölben von größerer Spannweite in der Regel erheblich zu groß ausfallen, wie man auch schon bei der bloßen Durchsicht der genannten Tabelle finden wird. Um nun solche Resultate, welche dem Constructeur mehr genügen werden, zu bekommen, könnte man auf einfachere und vielleicht auch zweckmäßigere Weise den folgenden Weg einschlagen:

Zunächst bestimmt man die Gewölbdicke im Scheitel nach einer bewährten praktischen Formel, wozu man allenfalls diejenigen benutzen kann, welche von Rudolff in Förster's Bauzeitung, Jahrgang 1845, aufgestellt wurde:

$$\eta_0 - y_0 = 0{,}026\,.\,W + 0^m{,}32.$$

Am empfehlenswerthesten ist aber wohl die folgende Formel, welche Scheffler in seiner Ueberseßung des Moseley giebt:

Für Rheinländisches Fußmaß:

$$\eta_0 - y_0 = 0{,}03\,.\left(\frac{r^2 + h^2}{h + 3}\right) + 1;$$

für französisches Metermaß:

$$\eta_0 - y_0 = 0{,}03\,.\left(\frac{r^2 + h^2}{h + 0{,}942}\right) + 0{,}314.$$

Darin bezeichnet r die halbe Spannweite und h die Pfeilhöhe vom Innenbogen des betrachteten Gewölbes.

Nachdem man die Gewölbdicke im Scheitel aus einer dieser Formeln bestimmt hat, kann man den Bruchwinkel unmittelbar aus den Garidel'schen Tabellen entnehmen, welche für Kreisgewölbe unter der Voraussetzung, daß die Gewölbfugen normal zum Innenbogen stehen, nach der weiter entwickelten Coulomb'schen Theorie berechnet sind, und erfahrungsmäßig mit der Wirklichkeit ziemlich gut übereinstimmende Resultate geben. Die Tabelle, welche Garidel für Kreisbögen mit horizontaler Abdeckung giebt, ist nachstehend mitgetheilt; es bezeichnet darin a das Verhältniß der Gewölbstärke zum Halbmesser des Innenbogens

$$a = \frac{\eta_0 - y_0}{r},$$

und c das Verhältniß der Höhe der Last über dem Scheitel des Außenbogens zum Halbmesser des Innenbogens

$$c = \frac{h - (\eta_0 - y_0)}{r}.$$

Tabelle für den Bruchwinkel.

a	$c=0$	$c=0{,}1$	$c=0{,}2$	$c=0{,}3$	$c=0{,}4$	$c=0{,}5$	$c=1{,}0$
0,05	68,00°	59,19°	54,04°	51,15°	49,35°	48,20°	45,74°
0,10	65,40	60,48	57,70	56,01	54,93	54,17	52,34
0,15	64,00	61,30	59,70	58,69	58,00	57,49	56,21
0,20	63,10	61,70	60,88	60,30	59,90	59,60	58,80
0,25	62,24	61,76	61,44	61,22	61,05	60,94	60,59
0,30	61,30	61,42	61,54	61,60	61,66	61,67	61,81
0,35	60,17	60,80	61,21	61,54	61,78	61,98	62,56
0,40	58,80	59,80	60,52	61,05	61,48	61,67	62,90
0,45	57,32	58,53	59,45	60,19	60,80	61,28	62,85
0,50	55,63	56,97	58,09	58,98	59,72	60,34	62,40

Wenn der Bruchwinkel α_m aus dieser Tabelle entnommen ist, so ergiebt sich daraus unmittelbar die Ordinate $y_m = r \,.\, cos\, \alpha_m$ für den zur Bruchfuge gehörigen Punkt des Innenbogens. Ferner ist nach der in §. 58 entwickelten Gleichung (A):

$$Y_m = y_m + \tfrac{1}{2}\,(Y_0 - y_0), \text{ und}$$

$$X_m = Y_m \,.\, tg\, \alpha_m .$$

Die Bestimmung des Gewölbschubes P_0 und der größten Pressung pro Flächeneinheit P' bleibt nun ganz dieselbe wie früher. Man hat nämlich durch einfache Interpolation zwischen die beiden nächstliegenden Werthe der kleinen Tabelle des §. 37, für den Winkel

$\alpha_x = Arc. \left(\sin = \frac{X_m}{r}\right)$ den entsprechenden Werth der Parenthese, welche in der Coordinaten-Gleichung für die Mittellinie des Druckes vorkommt, zu berechnen und mit r^3 zu multipliciren, dann erhält man denjenigen Ausdruck, welcher in der Gleichung (V) des §. 17 durch $F(x_m)$ bezeichnet ist. Dieselbe Gleichung dient dann zur Bestimmung des Gewölbschubes und die Gleichung (VII) des §. 18 zur Berechnung der größten Pressung pro Flächeneinheit:

$$P_0 = \frac{\varrho \cdot F(x_m)}{Y_0 - Y_m}, \text{ und}$$

$$P' = \frac{4}{3} \frac{P_0}{Y_0 - y_0}.$$

Wenn nun die so berechnete Pressung P' für das vorkommende Material noch zulässig ist, so darf man die, nach der Formel von Scheffler gemachte, vorläufige Annahme über die Gewölbdicke im Scheitel beibehalten, und das danach construirte Gewölbe als ein stabiles ansehen; im entgegengesetzten Falle aber wird man ohne Weiteres mit ziemlicher Sicherheit beurtheilen können, um wie viel man die erste unzulässige Annahme über die Gewölbdicke im Scheitel zu vergrößern hat, um dann bei Durchführung der Rechnung einen geeigneten Werth für P' zu bekommen.

§. 60.

Um die Anwendung der im vorigen Paragraphen gegebenen Regeln auf ein Beispiel zu zeigen, möge danach die Rechnung für das im Kapitel VI enthaltene erste Beispiel, nämlich für das Halbkreisgewölbe des Viaductes von Bouzanne, vorgenommen werden. Gegeben ist bekanntlich:

$$r = 8^m.$$
$$H = 12^m.$$
$$\varrho = 2400^k.$$

Die zu machende Annahme über die Gewölbdicke im Scheitel ergiebt sich aus der Formel von Scheffler, worin h die Pfeilhöhe des Gewölbes $= 8^m$ bezeichnet, gleich:

$$\eta_0 - y_0 = 0{,}03 \cdot \left(\frac{8^2 + 8^2}{8 + 0'942}\right) + 0{,}314 = 0^m{,}743,$$

oder in runder Zahl mag gesetzt werden:

$$\eta_0 - y_0 = 0^m{,}75.$$

Daraus folgt zunächst:

$$Y_0 - y_0 = \tfrac{2}{3} \cdot (\eta_0 - y_0) = 0^m{,}5.$$
$$Y_m - y_m = \tfrac{1}{2} \cdot (Y_0 - y_0) = 0^m{,}25.$$
$$Y_0 = 8^m{,}5.$$

Um den Bruchwinkel für den vorliegenden Fall aus der Garibel-

schen Tabelle entnehmen zu können, muß man vorerst den Werth der beiden Ausdrücke

$$a = \frac{\eta_0 - y_0}{r} = \frac{0{,}75}{8} = 0{,}094, \text{ und}$$

$$c = \frac{h - (\eta_0 - y_0)}{r} = \frac{4 - 0{,}75}{8} = 0{,}406$$

berechnen, und man findet dann für die in der Tabelle enthaltenen nächstkommenden Werthe, nämlich für $c = 0{,}4$ und $a = 0{,}10$ den Bruchwinkel:

$$\alpha_m = 55{,}93^0 = 54^0\,56'.$$

Nun ergiebt sich:

$$y_m = r\,.\,cos\,\alpha_m = 4^m{,}596.$$
$$Y_m = 4{,}496 + 0{,}25 = 4^m{,}846.$$
$$X_m = Y_m\,.\,tg\,\alpha_m = 6^m{,}904.$$
$$\alpha_x = Arc.\left(sin = \frac{x_m}{r}\right) = 59^0\,39'.$$

Mit Hülfe der kleinen Tabelle des §. 37 erhält man in Gleichung (40), welche für Halbkreisgewölbe die Coordinaten-Gleichung der Mittellinie des Druckes ist, die Werthe der Parenthese, den 10 verschiedenen Theilpunkten des Innenbogens entsprechend, folgendermaßen:

Winkel α.	Werth der Parenthese.
9 Grad	0,006158
18 "	0,02426
27 "	0,05335
36 "	0,09157
45 "	0,1360
54 "	0,1829
63 "	0,2275
72 "	0,2646
81 "	0,2893
90 "	0,2979

Denjenigen Werth der Parenthese, welcher dem Winkel $\alpha_x = 59^0\,39'$ entspricht, hat man durch Interpolation zwischen die beiden nächstliegenden Werthe der obigen Tabelle für $\alpha = 54^0$ und $\alpha = 63^0$ zu ermitteln; es beträgt nämlich die Differenz zwischen den beiden letzteren Werthen im Ganzen 0,0446, oder pro Grad durchschnittlich 0,0050, und für $5^0\,39' = 5{,}65^0$ demzufolge 0,02825. Der Werth

der Parenthese ist mithin für α_x gleich $0{,}1829 + 0{,}02825 = 0{,}21115$. Dieser Ausdruck mit $r^3 = 512$ multiplicirt, giebt:

$$F\,(x^m) = 108{,}1.$$

Man findet nun:

$$P_0 = \frac{2400 \cdot 108{,}1}{8{,}5 - (4{,}596 + 0{,}25)} = 71000^k.$$

$$P' = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{71000}{0{,}5} = 189333^k.$$

Diese Pressung pro Flächeneinheit wird bei Anwendung eines Gewölb-Materiales von mäßiger Festigkeit noch recht wohl zulässig sein.

Zur Bestimmung der Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Mittellinie des Druckes hat man die Gleichung (40) umgesetzt in

$$Y_0 - Y = \frac{\varrho \cdot r^3}{P_0}\left(\frac{H}{r} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{\alpha \cdot \sin\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\cos^3\alpha}{6} + \tfrac{1}{3}\right)$$

zu benutzen, und zwar braucht man nur die in der obigen kleinen Tabelle zusammengestellten Werthe der Parenthese überall mit dem constanten Factor $\frac{\varrho \cdot r^3}{P_0} = 17{,}31$ zu multipliciren, dann erhält man:

Winkel α.	Ordinate $Y_0 - Y$.
9 Grad	0,1066 Meter.
18 „	0,4201 „
27 „	0,9236 „
36 „	1,586 „
45 „	2,355 „
54 „	3,168 „
63 „	3,940 „
72 „	4,582 „
81 „	5,010 „
90 „	5,160 „

Die Gewölbstärke bei der Bruchfuge ist gleich dem dreifachen Abstande der Mittellinie des Druckes vom Innenbogen, welcher nach der Zeichnung $0^m{,}43$ beträgt, also gleich $1^m{,}29$ anzunehmen; es ist ferner bekannt, daß man die Gewölbstärke zwischen Scheitelfuge und Bruchfuge gleichmäßig wachsen zu lassen hat, um die Form des Außenbogens vom eigentlichen Gewölbe zu bekommen.

Mit Hülfe aller dieser berechneten Maßen ist das betrachtete Gewölbe in Fig. 6, Tafel I gezeichnet; der Unterschied zwischen dieser Zeichnung und der Fig. 1 auf derselben Tafel ist ziemlich auffallend, weil nämlich beide Zeichnungen, jede unter gewissen Umständen, zur

Construction eines und desselben Brückengewölbes brauchbar sein sollen. Man sieht daraus, wie verschiedenartig man ein Gewölbe von gegebenem Innenbogen 2c. construiren kann, je nachdem man dasselbe leicht oder schwer machen will, indem man entweder in der Weise rechnet, wie das Beispiel dieses Paragraphen es zeigt, oder die von Carvallo berechnete große Tabelle, welche nachstehend mitgetheilt wird, benutzt. Für gewöhnliche Fälle der Praxis empfiehlt es sich aber schon namentlich aus Sparsamkeits-Rücksichten, die Gewölbe in der Regel nicht so schwer zu machen, wie sie nach der Carvallo'schen Tabelle ausfallen würden.

Ordinaten-Tabelle

der

Mittellinie des Drucks für alle Radien von 1 bis 40 Meter und bei Belastungen von 1 bis 12 Meter Höhe.

Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich										$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
		9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°				
R. 1	1	0.017	0.065	0.140	0.235	0.343	0.451	0.549	0.629	0.679	0.696	0.197	0.21	1.52	2915
	2	0.017	0.065	0.140	0.236	0.344	0.452	0.550	0.629	0.679	0.697	0.198	0.37	2.58	5315
	3	0.017	0.065	0.141	0.236	0.344	0.452	0.550	0.630	0.680	0.697	0.199	0.53	3.63	7715
	4	0.017	0.065	0.141	0.237	0.345	0.453	0.551	0.630	0.680	0.698	0.200	0.70	4.69	10115
	5	0.017	0.065	0.141	0.237	0.345	0.453	0.551	0.630	0.681	0.698	0.202	0.87	5.75	12515
	6	0.017	0.065	0.141	0.238	0.346	0.454	0.552	0.631	0.681	0.699	0.203	1.04	6.80	14915
	7	0.017	0.065	0.142	0.238	0.346	0.454	0.552	0.631	0.682	0.699	0.205	1.21	7.86	17315
	8	0.017	0.065	0.142	0.239	0.347	0.455	0.553	0.631	0.682	0.700	0.206	1.38	8.92	19715
	9	0.017	0.066	0.142	0.239	0.347	0.455	0.553	0.632	0.683	0.700	0.207	1.56	9.97	22115
	10	0.017	0.066	0.142	0.240	0.348	0.456	0.554	0.632	0.683	0.700	0.208	1.74	11.03	24515
	11	0.017	0.066	0.143	0.240	0.348	0.456	0.554	0.633	0.684	0.701	0.209	1.90	12.09	26915
	12	0.017	0.066	0.143	0.241	0.349	0.457	0.555	0.633	0.685	0.701	0.210	2.07	13.15	29315
R. 2	1	0.031	0.120	0.269	0.453	0.662	0.874	1.070	1.227	1.330	1.365	0.284	0.71	3.34	6860
	2	0.031	0.121	0.270	0.455	0.665	0.878	1.073	1.231	1.333	1.369	0.296	0.95	4.26	11660
	3	0.032	0.122	0.272	0.458	0.668	0.881	1.077	1.234	1.337	1.372	0.308	1.19	5.17	16460
	4	0.032	0.123	0.273	0.460	0.671	0.885	1.080	1.238	1.340	1.376	0.320	1.46	6.09	21260
	5	0.032	0.124	0.275	0.462	0.674	0.888	1.084	1.241	1.344	1.379	0.332	1.74	7.00	26060
	6	0.032	0.125	0.276	0.465	0.677	0.892	1.087	1 245	1.347	1.383	0.344	2.04	7.92	30860
	7	0.033	0.126	0.278	0.467	0.680	0.893	1.091	1.248	1.351	1.386	0.356	2.36	8.83	35660
	8	0.033	0.127	0.279	0.469	0.683	0.899	1.094	1.252	1.354	1.390	0.368	2.69	9.75	40460
	9	0.033	0.128	0.281	0.472	0.686	0.902	1.098	1.255	1.358	1.393	0.380	3.04	10.66	45260
	10	0.033	0.129	0.282	0.474	0.689	0.905	1.101	1.259	1.361	1.397	0.392	3.40	11.58	50060
	11	0.034	0.130	0.284	0.476	0.692	0.909	1.105	1.262	1.365	1.400	0.404	3.78	12.49	54860
	12	0.034	0.132	0.285	0.479	0.695	0.912	1.109	1.266	1.368	1.403	0.415	4.17	13.41	59660

Nr. 3	1	0.046	0.179	0.392	0.664	0.975	1.294	1.588	1.830	1.987	2.042	0.363	1.21	4.43	11835
	2	0.046	0.181	0.395	0.669	0.981	1.300	1.595	1.836	1.993	2.048	0.385	1.53	5.28	19035
	3	0.047	0.182	0.398	0.673	0.986	1.307	1.601	1.842	1.998	2.053	0.408	1.88	6.13	26235
	4	0.047	0.184	0.401	0.678	0.992	1.313	1.608	1.848	2.004	2.059	0.430	2.25	6.98	33435
	5	0.047	0.185	0.404	0.683	0.998	1.319	1.615	1.854	2.010	2.064	0.452	2.65	7.83	40635
	6	0.048	0.187	0.407	0.687	1.004	1.326	1.621	1.860	2.016	2.070	0.475	3.09	8.68	47835
	7	0.048	0.188	0.410	0.692	1.009	1.332	1.628	1.866	2.021	2.075	0.497	3.55	9.53	55035
	8	0.048	0.190	0.413	0.696	1.015	1.339	1.634	1.872	2.027	2.081	0.520	4.05	10.39	62235
	9	0 049	0.191	0.416	0.701	1.021	1.345	1.641	1.878	2.033	2.086	0.542	4.57	11.24	69435
	10	0.049	0.193	0.419	0.705	1.027	1.352	1.647	1.884	2.039	2.092	0.565	5.12	12.09	76635
	11	0.049	0.194	0.422	0.710	1.032	1.358	1.654	1.890	2.044	2.097	0.588	5.71	12.94	83835
	12	0.050	0.196	0.425	0.715	1.038	1.364	1.660	1.897	2.050	2.102	0.610	6.33	13.80	91035
Nr. 4	1	0.059	0.234	0.511	0.870	1.280	1.708	2.104	2.432	2.647	2.722	0.410	1.69	5.51	17840
	2	0.060	0.236	0.516	0.877	1.289	1.717	2.114	2.440	2.655	2.729	0.448	2.11	6.29	27440
	3	0.061	0.239	0.520	0.884	1.298	1.727	2.123	2.449	2.662	2.737	0.484	2.57	7.08	37040
	4	0.061	0.241	0.525	0.891	1.307	1.736	2.133	2.457	2.670	2.744	0.520	3.07	7.86	46640
	5	0.062	0.243	0.530	0.898	1.316	1.746	2.142	2.466	2.678	2.751	0.555	3.60	8.64	56240
	6	0.063	0.246	0.535	0.905	1.325	1.755	2.152	2.474	2.686	2.759	0.590	4.17	9.43	65840
	7	0.063	0.248	0.539	0.912	1.334	1.765	2.161	2.483	2.693	2.766	0.625	4.79	10.21	75440
	8	0.064	0.250	0.544	0.919	1.343	1.774	2.171	2.491	2.701	2.773	0.660	5.45	11.00	85040
	9	0.065	0.253	0.549	0.926	1.352	1.784	2.180	2.500	2.709	2.780	0.696	6.15	11.78	94640
	10	0.065	0.255	0.554	0.933	1.361	1.793	2.190	2.508	2.717	2.788	0.732	6.90	12.57	104240
	11	0.066	0.257	0.558	0.940	1.370	1.803	2.199	2.517	2.724	2.795	0.768	7.70	13.36	113840
	12	0.067	0.260	0.563	0.948	1.378	1.813	2.209	2.526	2.732	2.803	0.799	8.48	14.14	123440
Nr. 5	1	0.072	0.286	0.626	1.069	1.580	2.115	2.619	3.034	3.310	3.408	0.445	2.24	6.72	24876
	2	0.073	0.289	0.633	1.079	1.593	2.128	2.631	3.045	3.319	3.416	0 493	2.75	7.43	36876
	3	0.074	0.293	0.639	1.089	1.605	2.141	2.644	3.056	3.329	3.425	0.541	3.30	8.14	48876
	4	0.075	0.296	0.646	1.099	1.617	2.154	2.656	3.067	3.338	3.433	0.590	3.91	8.85	60876
	5	0.076	0.299	0.653	1.109	1.629	2.167	2.668	3.078	3.347	3 442	0.639	4.58	9.56	72876
	6	0.077	0.303	0.659	1.119	1.641	2.180	2.681	3.089	3.357	3.450	0.688	5.30	10.27	84876
	7	0.078	0.306	0.666	1.129	1.653	2.193	2.693	3.100	3.366	3.459	0.737	6.07	10.98	96876
	8	0.078	0.310	0.672	1.139	1.666	2.206	2.705	3.111	3.375	3.467	0.786	6.89	11.69	108876
	9	0.079	0.313	0.679	1.149	1.678	2.219	2.718	3.122	3.385	3.476	0.835	7.76	12.40	120876
	10	0.080	0.317	0.685	1.159	1.690	2.232	2.730	3.133	3.394	3.484	0.884	8.68	13.11	132876
	11	0.081	0.320	0.692	1.169	1.702	2.245	2.742	3.144	3.404	3.493	0.932	9.65	13.82	144876
	12	0.082	0.323	0.699	1.178	1.715	2.258	2.755	3.154	3.413	3.502	0.980	10.69	14.54	156876

Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich										$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
		9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°				
N. 6	1	0.086	0.336	0.739	1.267	1.881	2.527	3.141	3.650	3.990	4.109	0.490	2.74	7.48	32941
	2	0.087	0.340	0.748	1.280	1.896	2.543	3.155	3.662	3.999	4.117	0.550	3.36	8.16	47341
	3	0.088	0.345	0.756	1.292	1.911	2.559	3.170	3.674	4.009	4.126	0.610	4.04	8.84	61741
	4	0.089	0 349	0.765	1.305	1.927	2.575	3.184	3.686	4.018	4.134	0.670	4.78	9.51	76141
	5	0.090	0.353	0.774	1.318	1.942	2.591	3.199	3.698	4.028	4.143	0.730	5.58	10.19	90541
	6	0.091	0.358	0.782	1.330	1.957	2.607	3.213	3.710	4.037	4.151	0.791	6.45	10.87	104941
	7	0.093	0.362	0.791	1.343	1.972	2.623	3 228	3.722	4.047	4.160	0.851	7.38	11.55	119341
	8	0.094	0.366	0.799	1.355	1.988	2.639	3.242	3.734	4.056	4.168	0.912	8.37	12.22	132741
	9	0.095	0.371	0.808	1.368	2.003	2.655	3.257	3.746	4.066	4.177	0.972	9.42	12.90	148141
	10	0.096	0.375	0.816	1.380	2.018	2.671	3.271	3.758	4.075	4.185	1.033	10.53	13.58	162541
	11	0.097	0.379	0.825	1.393	2.033	2.687	3.286	3.770	4.085	4.194	1.093	11.70	14.26	176941
	12	0.098	0.384	0.834	1.406	2.049	2.702	3.300	3.781	4.094	4.202	1.154	12.93	14.93	191341
N. 7	1	0.098	0.385	0.848	1.461	2.178	2.940	3.669	4.278	4.686	4.829	0.540	3.29	8.11	42036
	2	0.099	0.390	0.859	1.476	2.196	2.958	3.685	4.290	4.694	4.836	0.611	4.01	8.77	58836
	3	0.101	0.396	0.869	1.492	2.214	2.977	3.701	4.301	4.702	4.842	0.682	4.81	9.43	75636
	4	0.102	0.401	0.880	1.507	2.233	2.995	3.716	4.313	4.710	4.849	0.754	5.68	10.10	92436
	5	0.104	0.406	0.891	1.522	2.251	3.013	3.732	4.325	4.718	4.856	0.826	6.62	10.76	109236
	6	0.105	0.412	0.902	1.538	2.269	3.032	3.748	4.336	4.726	4.862	0.898	7.63	11.47	126036
	7	0.107	0.417	0.912	1.553	2.287	3.050	3.764	4.348	4.734	4.869	0.970	8.71	12.09	142836
	8	0.108	0.422	0.923	1.568	2.306	3.068	3.779	4.359	4.742	4.875	1.042	9.87	12.75	159636
	9	0.110	0.428	0.934	1.584	2.324	3.087	3.795	4.371	4.750	4.882	1.114	11.10	13.41	176436
	10	0.111	0.433	0.945	1.599	2.342	3.105	3.811	4.382	4 758	4.888	1.186	12.40	14.08	193236
	11	0.113	0.438	0.955	1.614	2.360	3.123	3.827	4.394	4.766	4.895	1.258	13.77	14.74	210036
	12	0.114	0.444	0.966	1.630	2.379	3.142	3.842	4.406	4.774	4.902	1.330	15.21	15.41	226836

R. 8	1	0.110	0.434	0.958	1.656	2.476	3.354	4.199	4.907	5.382	5.550	0.587	3.79	8.62	52162
	2	0.112	0.440	0.971	1.674	2.498	3.375	4.216	4.918	5.389	5.555	0.668	4.64	9.27	71362
	3	0.113	0.447	0.983	1.692	2.519	3.395	4.233	4.929	5.395	5.559	0.749	5.57	9.92	90562
	4	0.115	0.453	0.996	1.710	2.540	3.416	4.249	4.941	5.402	5.564	0.850	6.58	10.57	109762
	5	0.117	0.460	1.009	1.728	2.561	3.437	4.266	4.952	5.409	5.569	0.911	7.67	11.22	128962
	6	0.119	0.466	1.022	1.746	2.582	3.458	4.283	4.964	5.415	5.574	0.992	8.84	11.87	148162
	7	0.120	0.473	1.034	1.764	2.604	3.478	4.300	4.975	5.422	5.578	1.073	10.10	12.52	167362
	8	0.122	0.479	1.047	1.782	2.625	3.499	4.317	4.987	5.428	5.583	1.155	11.43	13.17	186562
	9	0.124	0.486	1.060	1.800	2.646	3.520	4.334	4.998	5.435	5.588	1.236	12.85	13.82	205762
	10	0.126	0.492	1.073	1.818	2.667	3.541	4.350	5.010	5.441	5.593	1.317	14.34	14.47	224962
	11	0.127	0.499	1.085	1.836	2.689	3.561	4.367	5.021	5.448	5.597	1.398	15.88	15.12	244162
	12	0.129	0.505	1.098	1.855	2.710	3.582	4.384	5.032	5.455	5.602	1.480	17.50	15.77	263362
R. 9	1	0.121	0.479	1.063	1.845	2.772	3.770	4.736	5.551	6.100	6.295	0.633	4.37	9.11	63318
	2	0.123	0.487	1.078	1.866	2.796	3.792	4.753	5.561	6.104	6.295	0.725	5.33	9.76	84918
	3	0.125	0.494	1.093	1.887	2.820	3.815	4.770	5.570	6.107	6.296	0.817	6.38	10.40	106518
	4	0.127	0.502	1.108	1.908	2.844	3.837	4.787	5.580	6.110	6.297	0.910	7.52	11.05	128118
	5	0.129	0.510	1.123	1.929	2.868	3.860	4.804	5.590	6.113	6.298	1.002	8.75	11.70	149718
	6	0.131	0.518	1.138	1.950	2.892	3.882	4.821	5.599	6.117	6.299	1.095	10.07	12.34	171318
	7	0.133	0.525	1.153	1.971	2.916	3.905	4.838	5.609	6.120	6.299	1.187	11.48	12.99	192918
	8	0.136	0.533	1.167	1.992	2.940	3.927	4.856	5.618	6.123	6.300	1.280	12.98	13.63	214518
	9	0.138	0.541	1.182	2.013	2.964	3.950	4.873	5.628	6.126	6.301	1.372	14.57	14.28	236118
	10	0.140	0.549	1.197	2.034	2.988	3.972	4.890	5.637	6.130	6.302	1.465	16.24	14.92	257718
	11	0.142	0.556	1.212	2.055	3.012	3.995	4.907	5.647	6.133	6.302	1.557	18.00	15.57	279318
	12	0.144	0.564	1.227	2.076	3.036	4.017	4.924	5.657	6.136	6.303	1.650	19.85	16.22	300918
R. 10	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	75504
	2	0.134	0.534	1.186	2.058	2.095	4.210	5.290	6.203	6.813	7.037	0.780	6.00	10.24	99504
	3	0.137	0.543	1.203	2.082	3.121	4.235	5.308	6.211	6.818	7.033	0.880	7.19	10.88	123504
	4	0.139	0.552	1.220	2.106	3.148	4.259	5.325	6.219	6.818	7.030	0.980	8.47	11.52	147504
	5	0.142	0.561	1.237	2.130	3.175	4.283	5.342	6.227	6.818	7.027	1.080	9.85	12.16	171504
	6	0.144	0.570	1.254	2.154	3.202	4.307	5.359	6.235	6.818	7.023	1.180	11.33	12.80	195504
	7	0.147	0.579	1.271	2.178	3.228	4.332	5.377	6.243	6.818	7.020	1.280	12.90	13.44	219504
	8	0.149	0.588	1.288	2.202	3.255	4.356	5.394	6.251	6.817	7.017	1.380	14.57	14.08	243504
	9	0.152	0.596	1.305	2.225	3.282	4.380	5.411	6.258	6.817	7.013	1.480	16.33	14.72	267504
	10	0.154	0.605	1.322	2.249	3.309	4.404	5.428	6.266	6.817	7.010	1.580	18.19	15.36	291504
	11	0.157	0.614	1.339	2.273	3.335	4.429	5.446	6.274	6.817	7.007	1.680	20.15	16.00	315504
	12	0.159	0.623	1.356	2.297	3.362	4.453	5.463	6.282	6.817	7.004	1.780	22.20	16.63	339504

Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich										$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
		9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°				
R. 11	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	88719
	2	0.145	0.578	1.286	2.241	3.385	4.626	5.835	6.862	7.556	7.804	0.840	6.77	10.60	115119
	3	0.148	0.588	1.306	2.268	3.415	4.651	5.852	6.867	7.550	7.794	0.950	8.08	11.25	141519
	4	0.150	0.598	1.325	2.295	3.444	4.677	5.868	6.871	7.545	7.785	1.062	9.49	11.90	167919
	5	0.153	0.608	1.345	2.322	3.474	4.703	5.884	6.875	7.539	7.775	1.170	11.01	12.55	194319
	6	0.156	0.618	1.364	2.349	3.503	4.729	5.901	6.880	7.534	7.766	1.280	12.64	13.20	220719
	7	0.159	0.628	1.384	2.376	3.533	4.754	5.917	6.884	7.528	7.756	1.390	14.37	13.85	247119
	8	0.162	0.639	1.403	2.403	3.562	4.780	5.933	6.888	7.523	7.747	1.500	16.21	14.50	273519
	9	0.164	0.649	1.423	2.430	3.592	4.806	5.950	6.893	7.517	7.737	1.610	18.16	15.15	299919
	10	0.167	0.659	1.442	2.457	3.621	4.832	5.966	6.898	7.512	7.728	1.720	20.22	15.80	326319
	11	0.170	0.670	1.462	2.484	3.651	4.857	5.982	6.902	7.506	7.718	1.830	22.38	16.45	352719
	12	0.173	0.680	1.481	2.511	3.681	4.883	5.999	6.906	7.500	7.708	1.940	24.65	17.10	379119
R. 12	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	102965
	2	0.155	0.621	1.386	2.425	3.676	5.042	6.379	7.521	8.295	8.571	0.915	7.50	11.00	131765
	3	0.159	0.633	1.408	2.455	3.709	5.069	6.395	7.522	8.284	8.555	1.030	8.95	11.65	160565
	4	0.162	0.644	1.430	2.485	3.741	5.096	6.410	7.523	8.273	8.539	1.145	10.51	12.30	189365
	5	0.165	0.656	1.452	2.515	3.773	5.123	6.426	7.524	8.262	8.523	1.260	12.19	12.95	218165
	6	0.168	0.667	1.474	2.545	3.806	5.150	6.441	7.525	8.251	8.507	1.376	13.98	13.60	246965
	7	0.172	0.679	1.496	2.575	3.838	5.177	6.457	7.526	8.240	8.491	1.491	15.88	14.26	275765
	8	0.175	0.690	1.517	2.605	3.870	5.204	6.472	7.527	8.228	8.476	1.607	17.90	14.91	304565
	9	0.178	0.702	1.539	2.635	3.903	5.231	6.488	7.527	8.217	8.460	1.722	20.03	15.56	333365
	10	0.181	0.713	1.561	2.665	3.935	5.258	6.503	7.528	8.208	8.444	1.838	22.27	16.22	362165
	11	0.185	0.725	1.583	2.695	3.967	5.286	6.519	7.529	8.195	8.428	1.954	24.63	16.87	390965
	12	0.188	0.736	1.605	2.725	4.000	5.313	6.535	7.530	8.184	8.412	2.070	27.10	17.53	419765

N. 13	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	118241
	2	0.166	0.664	1.486	2.608	3.967	5.457	5.924	8.180	9.033	9.339	0.974	8.25	11.31	149441
	3	0.170	0.677	1.511	2.641	4.002	5.486	6.938	8.177	9.016	9.316	1.097	9.83	11.98	180641
	4	0.173	0.690	1.535	2.674	4.037	5.514	6.953	8.175	9.000	9.294	1.220	11.53	12.65	211841
	5	0.177	0.703	1.559	2.707	4.072	5.543	6.968	8.172	8.983	9.272	1.342	13.35	13.32	243041
	6	0.180	0.716	1.584	2.740	4.108	5.571	6.983	8.170	8.967	9.250	1.465	15.30	13.99	474241
	7	0.184	0.729	1.608	2.773	4.143	5.600	6.997	8.167	8.950	9.227	1.587	17.37	14.66	305441
	8	0.187	0.741	1.632	2.806	4.178	5.628	7.012	8.165	8.934	9.205	1.710	19.56	15.33	336641
	9	0.191	0.754	1.657	2.840	4.213	5.657	7.027	8.162	8.917	9.183	1.832	21.88	16.00	367841
	10	0.194	0.767	1.681	2.873	4.249	5.685	7.042	8.160	8.901	9.161	1.955	24.32	16.67	399041
	11	0.198	0.780	1.705	2.906	4.284	5.714	7.056	8.157	8.884	9.138	2.077	26.88	17.34	430241
	12	0.202	0.793	1.730	2.939	4.319	5.743	7.071	8.154	8.867	9.116	2.200	29.56	18.00	461441
N. 14	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	134547
	2	0.177	0.708	1.587	2.792	4.258	5.873	7.467	8.839	9.772	10.105	1.045	9.02	11.57	168147
	3	0.181	0.722	1.613	2.828	4.296	5.903	7.481	8.833	9.750	10.077	1.172	10.72	12.26	201747
	4	0.185	0 736	1.640	2.864	4.334	5.933	7.495	8.827	9.728	10.048	1.300	12.56	12.95	235347
	5	0.189	0.750	1.667	2.900	4.372	5.963	7.509	8.821	9.706	10.020	1.427	14.53	13.64	268947
	6	0.193	0.764	1.694	2.936	4.410	5.993	7.523	8.815	9.684	9.991	1.555	16.63	14.33	302547
	7	0.197	0.778	1.720	2.972	4.448	6.023	7 537	8.809	9.662	9.963	1.682	18.86	15.03	336147
	8	0.201	0.792	1.747	3.008	4.486	6.053	7.551	8.803	9.640	9.934	1.810	21.23	15.72	369747
	9	0.205	0.807	1.774	3.045	4.524	6.083	7.565	8.796	9.617	9.906	1.937	23.73	16.41	403347
	10	0.209	0.821	1.801	3.081	4.562	6.113	7.579	8.790	9.595	9.878	2.065	26.36	17.11	436947
	11	0.213	0.835	1.827	3.117	4.600	6.143	7.593	8.784	9.573	9.849	2.192	29.12	17.80	470547
	12	0.217	0.849	1.854	3.153	4.638	6.173	7.607	8.778	9.551	9.820	2.320	32.02	18.50	504147
N. 15	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	151884
	2	0.187	0.751	1.688	2.974	4.548	6 288	8.012	9.497	10.510	10.873	1.105	9.77	11.81	187884
	3	0.192	0.767	1.717	3.014	4.589	6.320	8.025	9.487	10.482	10.838	1.238	11.61	12.52	223884
	4	0.196	0.782	1.746	3.053	4.530	6.351	8.038	9.478	10.455	10.803	1.370	13.59	13.23	259884
	5	0.200	0.798	1.775	3.092	4.671	6.383	8.051	9.469	10.427	10.768	1.502	15.71	13.94	295884
	6	0.205	0.813	1.804	3.132	4.712	6.414	8.064	9.459	10.400	10.733	1.635	17.97	14.65	331884
	7	0.209	0.829	1.833	3.171	4.753	6.446	8.077	9.450	10.372	10.698	1.767	20.37	15.36	367884
	8	0.213	0.844	1.862	3.210	4.794	6.477	8.090	9.441	10.345	10.664	1.900	22.91	16.07	403884
	9	0.218	0.860	1.892	3.250	4.835	6.509	8.104	9.431	10.317	10.629	2.032	25.59	16.78	439884
	10	0.222	0.875	1.921	3.289	4.876	6.541	8.117	9.422	10.290	10.594	2.165	28.41	17.49	475884
	11	0.226	0.891	1.950	3.328	4.917	6.572	8.130	9.413	10.262	10.559	2.297	31.37	18.20	511884
	12	0.231	0.906	1.979	3.368	4.958	6.604	8.143	9.403	10.234	10.524	2.430	34.48	18.92	547884

Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich 9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°	$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
R. 16	1	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	170250
	2	0.188	0.756	1.705	3.016	4.630	6.424	8.210	9.754	10.810	11.188	1.187	11.28	12.26	208650
	3	0.194	0.777	1.745	3.072	4.694	6.485	8.257	9.781	10.821	11.193	1.324	13.22	12.98	247050
	4	0.199	0.797	1.784	3.128	4.758	6.545	8.303	9.808	10.832	11.197	1.460	15.31	13.70	285450
	5	0.205	0.817	1.823	3.184	4.822	6.605	8.350	9.835	10.843	11.202	1.596	17.55	14.42	323850
	6	0.210	0.838	1.862	3.240	4.886	6.666	8.396	9.862	10.855	11.206	1.732	19.92	15.15	362250
	7	0.216	0.858	1.902	3.296	4.950	6.726	8.443	9.889	10.866	11.211	1.867	22.43	15.87	400650
	8	0.221	0.878	1.941	3.352	5.014	6.787	8.489	9.916	10.877	11.215	2.003	25.08	16.60	439050
	9	0.227	0.899	1.980	3.408	5.077	6.847	8.536	9.942	10.888	11.220	2.139	27.87	17.32	477450
	10	0.233	0.919	2.019	3.464	5.141	6.908	8.582	9.969	10.899	11.224	2.275	30.80	18.05	515850
	11	0.238	0.940	2.059	3.519	5.205	6.968	8.629	9.996	10 910	11.229	2.413	33.86	18.77	554250
	12	0.244	0.960	2.098	3.575	5.269	7.028	8.676	10.023	10.922	11.234	2.550	37.07	19.50	592650
R. 17	1	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	189646
	2	0.189	0.762	1.723	3.059	4.712	6.560	8.408	10.013	11.109	11.504	1.272	12.76	13.12	230446
	3	0.196	0.787	1.773	3.131	4.799	6.649	8.488	10.076	11.159	11.548	1.401	14.83	13.81	271246
	4	0.203	0.812	1.822	3.203	4.886	6.738	8.568	10.139	11.209	11.592	1.550	17.04	14.50	312046
	5	0.210	0.837	1.871	3.275	4.973	6.827	8.648	10.202	11.259	11.636	1.689	19.39	15.19	352846
	6	0.217	0.862	1.921	3.348	5.060	6.917	8.728	10.265	11.309	11.680	1.828	21.87	15.88	393646
	7	0.224	0.887	1.970	3.420	5.146	7.006	8.808	10.328	11.359	11.724	1.967	24.49	16.57	434446
	8	0.231	0.912	2.020	3.492	5.233	7.095	8.888	10.391	11.409	11.768	2.106	27.25	17.25	475246
	9	0.237	0.938	2.069	3.564	5.320	7.185	8.969	10.454	11.459	11.812	2.245	30.15	17.94	516046
	10	0.244	0.963	2.119	3.637	5.407	7.274	9.049	10.517	11.509	11.856	2.383	33.19	18.63	556846
	11	0 251	0.988	2.168	3.709	5.493	7.363	9.129	10.580	11.559	11.900	2.521	36.35	19.32	597646
	12	0.258	1.013	2.217	3.781	5.580	7.452	9.209	10.643	11.610	11.944	2.660	39.67	20.00	638446

N. 18	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	210072
	2	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	253272
	3	0.198	0.797	1.800	3.189	4.904	6.814	8.720	10.370	11.497	11.903	1.499	16.44	14.65	296472
	4	0.206	0.827	1.860	3.278	5.014	6.932	8.833	10.469	11.586	11.986	1.640	18.77	15.30	339672
	5	0.214	0.857	1.919	3.367	5.124	7.050	8.947	10.568	11.675	12.070	1.780	21.23	15.95	382872
	6	0.222	0.887	1.979	3.456	5.233	7.168	9.060	10.667	11.764	12.153	1.921	23.82	16.60	426072
	7	0.230	0.917	2.038	3.544	5.343	7.286	9.174	10.766	11.853	12.237	2.061	26.55	17.25	469272
	8	0.238	0.947	2.098	3.633	5.452	7.404	9.287	10.865	11.942	12.320	2.202	29.42	17.90	512472
	9	0.247	0.977	2.157	3.722	5.562	7.522	9.401	10.964	12.031	12.404	2.342	32.43	18.55	555672
	10	0.255	1.007	2.217	3.811	5.671	7.640	9.514	11.063	12.120	12.487	2.483	35.58	19.20	598872
	11	0.263	1.037	2.276	3.899	5.781	7.758	9.628	11.162	12.209	12.571	2.624	38.85	19.85	642072
	12	0.271	1.067	2.336	3.988	5.891	7.876	9.742	11.262	12.297	12.654	2.765	42.27	20.50	685272
N. 19	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	231529
	2	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	277129
	3	0.201	0.807	1.828	3.248	5.010	6.978	8.951	10.765	11.835	12.258	1.577	18.06	15.38	322729
	4	0.210	0.842	1.898	3.353	5.142	7.125	9.098	10.800	11.963	12.381	1.720	20.50	16.00	369329
	5	0.219	0.877	1.968	3.458	5.275	7.272	9.245	10.935	12.091	12.504	1.862	23.07	16.62	413929
	6	0.229	0.912	2.037	3.563	5.407	7.419	9.392	11.070	12.219	12.627	2.005	25.78	17.24	459529
	7	0.238	0.946	2.107	3.668	5.540	7.566	9.539	11.206	12.346	12.750	2.147	28.62	17.86	505129
	8	0.247	0.981	2.176	3.773	5.672	7.713	9.686	11.341	12.474	12.873	2.290	31.60	18.48	550729
	9	0.257	1.016	2.246	3.879	5.805	7.859	9.833	11.476	12.602	12.995	2.432	34.71	19.10	596329
	10	0.266	1.051	2.316	3.984	5.937	8.006	9.980	11.611	12.730	13.118	2.575	37.97	19.72	641929
	11	0.275	1.085	2.385	4.089	6.070	8.153	10.127	11.747	12.857	13.241	2.717	41.35	20.34	687529
	12	0.285	1.120	2.455	4.194	6.202	8.300	10.275	11.882	12.985	13.364	2.860	44.87	20.95	733129
N. 20	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	254016
	2	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	302016
	3	0.203	0.818	1.856	3.308	5.115	7.144	9.181	10.959	12.175	12.613	1.657	19.68	15.85	350016
	4	0.213	0.857	1.936	3.429	5.270	7.319	9.362	11.130	12.341	12.775	1.800	22.23	16.47	398016
	5	0.224	0.897	2.016	3.551	5.425	7.495	9.543	11.302	12.508	12.937	1.944	24.92	17.09	446016
	6	0.234	0.936	2.095	3.672	5.581	7.670	9.724	11.473	12.674	13.100	2.088	27.74	17.71	494016
	7	0.245	0.976	2.175	3.794	5.736	7.846	9.905	11.645	12.841	13.262	2.231	30.69	18.33	542016
	8	0.255	1.015	2.255	3.915	5.891	8.021	10.085	11.816	13.007	13.424	2.375	33.78	18.96	590016
	9	0.266	1.055	2.335	4.037	6.047	8.197	10.266	11.988	13.174	13.587	2.519	37.00	19.58	638016
	10	0.277	1.094	2.414	4.158	6.202	8.372	10.447	12.159	13.340	13.749	2.663	40.36	20.20	686016
	11	0.287	1.134	2.494	4.280	6.357	8.548	10.628	12.331	13.507	13.911	2.806	43.85	20.82	734016
	12	0.298	1.174	2.574	4.401	6.513	8.723	10.808	12.502	13.673	14.074	2.950	47.47	21.45	782016

Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich										$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
		9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°				
R. 21	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	277532
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	327932
	3	0.210	0.847	1.930	3.449	5.350	7.493	9.654	11.543	12.839	13.306	1.735	21.00	16.26	378332
	4	0.221	0.889	2.014	3.577	5.513	7.676	9.841	11.720	13.009	13.471	1.880	23.68	16.90	428732
	5	0.232	0.931	2.098	3.705	5.676	7.859	10.028	11.897	13.179	13.636	2.026	26.51	17.54	479132
	6	0.244	0.973	2.182	3.833	5.839	8.042	10.216	12.074	13.349	13.801	2.171	29.47	18.18	529532
	7	0.255	1.015	2.267	3.961	6.002	8.226	10.403	12.251	13.518	13.966	2.317	32.57	18.82	579932
	8	0.266	1.057	2.351	4.089	6.165	8.409	10.590	12.428	13.688	14.131	2.463	35.82	19.45	630332
	9	0.277	1.099	2.435	4.217	6.329	8.592	10.778	12.605	13.858	14.296	2.608	39.20	20.09	680732
	10	0.289	1.141	2.519	4.345	6.492	8.775	10.965	12.782	14.028	14.461	2.754	42.73	20.73	731132
	11	0.300	1.183	2.604	4.473	6.655	8.959	11.152	12.959	14.197	14.626	2.900	46.40	21.37	781532
	12	0.311	1.225	2.688	4.601	6.818	9.142	11.340	13.136	14.367	14.791	3.045	50.20	22.00	731932
R. 22	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	302079
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	354879
	3	0.217	0.878	2.003	3.590	5.585	7.843	10.126	12.126	13.504	14.000	1.804	22.32	16.53	407679
	4	0.229	0.922	2.092	3.725	5.756	8.034	10.320	12.309	13.677	14.167	1.950	25.13	17.20	460479
	5	0.241	0.966	2.181	3.860	5.927	8.225	10.514	12.492	13.850	14.335	2.098	28.10	17.87	513279
	6	0.253	1.010	2.270	3.994	6.098	8.416	10.708	12.674	14.023	14.502	2.245	31.20	18.54	566079
	7	0.265	1.055	2.358	4.129	6.268	8.607	10.902	12.857	14.196	14.670	2.393	34.45	19.21	618879
	8	0.277	1.099	2.447	4.263	6.439	8.798	11.096	13.039	14.369	14.837	2.540	37.86	19.88	671679
	9	0.288	1.143	2.536	4.398	6.610	8.988	11.289	13.222	14.542	15.005	2.688	41.40	20.55	724479
	10	0.300	1.187	2.625	4.532	6.781	9.179	11.483	13.404	14.715	15.172	2.835	45.10	21.22	777279
	11	0.312	1.232	2.713	4.667	6.951	9.370	11.677	13.587	14.888	15.340	2.983	48.95	21.89	830079
	12	0.324	1.276	2.802	4.802	7.122	9.561	11.871	13.770	15.061	15.508	3.130	52.93	22.55	882879

N. 23	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	327656
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	382856
	3	0.223	0.907	2.076	3.731	5.821	8.192	10.599	12.711	14.168	14.693	1.870	23.65	16.91	438056
	4	0.236	0.954	2.169	3.872	5.999	8.391	10.799	12.899	14.344	14.863	2.020	26.59	17.60	493256
	5	0.249	1.001	2.262	4.013	6.178	8.590	11.000	13.087	14.520	15.033	2.169	29.69	18.29	548456
	6	0.261	1.047	2.356	4.154	6.356	8.788	11.200	13.275	14.696	15.203	2.318	32.93	18.99	603656
	7	0.274	1.094	2.449	4.296	6.535	8.987	11.401	13.463	14.873	15.374	2.468	36.33	19.68	658856
	8	0.287	1.140	2.542	4.437	6.713	9.185	11.601	13.651	15.049	15.554	2.617	39.90	20.38	714056
	9	0.299	1.187	2.636	4.578	6.892	9.384	11.802	13.840	15.225	15.714	2.766	43.60	21.07	769256
	10	0.312	1.234	2.729	4.719	7.070	9.582	12.002	14.028	15.401	15.885	2.916	47.47	21.77	824456
	11	0.324	1.281	2.822	4.861	7.249	9.781	12.203	14.216	15.578	16.055	3.065	51.50	22.46	879656
	12	0.337	1.327	2.916	5.002	7.427	9.980	12.403	14.404	15.754	16.225	3.215	55.66	23.15	934856
N. 24	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	354263
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	411863
	3	0.231	0.938	2.149	3.872	6.056	8.543	11.071	13.294	14.833	15.386	1.929	24.98	17.28	469463
	4	0.244	0.987	2.247	4.020	6.242	8.749	11.278	13.488	15.012	15.559	2.080	28.05	18.00	527063
	5	0.257	1.036	2.345	4.168	6.428	8.955	11.485	13.682	15.192	15.732	2.230	31.28	18.72	584663
	6	0.270	1.085	2.443	4.316	6.614	9.161	11.692	13.876	15.371	15.905	2.381	34.67	19.43	642263
	7	0.284	1.134	2.541	4.464	6.800	9.368	11.899	14.069	15.551	16.078	2.531	38.22	20.15	699863
	8	0.297	1.183	2.639	4.612	6.986	9.574	12.106	14.263	15.730	16.251	2.682	41.94	20.86	757463
	9	0.310	1.232	2.736	4.760	7.172	9.780	12.313	14.457	15.910	16.423	2.832	45.81	21.58	815063
	10	0.324	1.280	2.834	4.908	7.358	9.986	12.520	14.651	16.089	16.596	2.983	49.85	22.29	872663
	11	0.337	1.329	2.932	5.055	7.545	10.193	12.727	14.844	16.269	16.769	3.134	54.05	23.01	930263
	12	0.350	1.378	3.030	5.203	7.731	10.399	12.934	15.038	16.448	16.942	3.285	58.40	23.73	987863
N. 25	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	381900
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	441900
	3	0.238	0.968	2.223	4.014	6.290	8.892	11.545	13.879	15.497	16.081	1.988	26.31	17.66	501900
	4	0.252	1.019	2.325	4.168	6.484	9.106	11.758	14.078	15.680	16.256	2.140	29.51	18.39	561900
	5	0.266	1.070	2.428	4.322	6.678	9.320	11.972	14.277	15.863	16.432	2.293	32.88	19.12	621900
	6	0.280	1.121	2.530	4.477	6.872	9.534	12.185	14.476	16.046	16.607	2.445	36.41	19.85	681900
	7	0.293	1.173	2.633	4.631	7.066	9.748	12.399	14.676	16.228	16.783	2.598	40.11	20.59	741900
	8	0.307	1.224	2.735	4.785	7.260	9.962	12.612	14.875	16.411	16.958	2.750	43.98	21.32	801900
	9	0.321	1.275	2.838	4.940	7.454	10.176	12.826	15.074	16.594	17.134	2.903	48.02	22.05	861900
	10	0.335	1.326	2.940	5.094	7.648	10.390	13.039	15.274	16.777	17.309	3.055	52.23	22.79	921900
	11	0.348	1.378	3.043	5.248	7.842	10.604	13.253	15.473	16.959	17.485	3.208	56.60	23.52	981900
	12	0.362	1.429	3.145	5.403	8.036	10.818	13.466	15.672	17.142	17.660	3.360	61.14	24.26	1.041900

Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich										$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
		9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°				
R. 26	1	„	„	„	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	410566
	2	„	„	„	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	472966
	3	„	„	„	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	535366
	4	0.259	1.050	2.400	4.313	6.727	9.469	12.251	14.690	16.376	16.983	2.201	31.07	18.83	597766
	5	0.273	1.104	2.507	4.474	6.928	9.690	12.469	14.892	16.559	17.158	2.353	34.58	19.59	660166
	6	0.288	1.157	2.614	4.634	7.129	9.910	12.687	15.094	16.742	17.333	2.506	38.26	20.35	722566
	7	0.302	1.211	2.721	4.795	7.330	10.131	12.906	15.295	16.926	17.509	2.659	42.11	21.11	784966
	8	0.316	1.264	2.828	4.955	7.531	10.351	13.124	15.497	17.109	17.684	2.812	46.14	21.87	847366
	9	0.331	1.318	2.934	5.116	7.732	10.572	13.342	15.699	17.292	17.859	2.965	50.35	22.63	909766
	10	0.345	1.371	3.041	5.276	7.933	10.792	13.560	15.901	17.475	18.034	3.118	54.73	23.39	972166
	11	0.359	1.425	3.148	5.437	8.134	11.013	13.779	16.103	17.659	18.210	3.271	59.28	24.15	1.034566
	12	0.374	1.478	3.255	5.597	8.335	11.233	13.997	16.304	17.842	18.385	3.425	64.00	24.90	1.096966
R. 27	1	„	„	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	440264
	2	„	„	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	505064
	3	„	„	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	569864
	4	0.266	1.080	2.475	4.458	6.970	9.833	12.744	15.302	17.073	17.710	2.250	32.63	19.25	634664
	5	0.281	1.136	2.586	4.625	7.178	10.060	12.967	15.506	17.257	17.885	2.405	36.28	20.03	699464
	6	0.296	1.192	2.697	4.792	7.386	10.287	13.190	15.710	17.441	18.060	2.560	40.11	20.81	764264
	7	0.311	1.248	2.809	4.958	7.594	10.514	13.413	15.914	17.624	18.235	2.715	44.11	21.59	829064
	8	0.326	1.304	2.920	5.125	7.802	10.741	13.636	16.118	17.808	18.410	2.870	48.30	22.37	893864
	9	0.341	1.359	3.031	5.292	8.010	10.968	13.859	16.322	17.992	18.585	3.025	52.68	23.15	958664
	10	0.356	1.415	3.142	5.459	8.218	11.195	14.082	16.526	18.175	18.760	3.180	57.23	23.93	1.023464
	11	0.371	1.471	3.254	5.625	8.426	11.422	14.306	16.731	18.359	18.935	3.335	61.96	24.71	1.088264
	12	0.386	1.527	3.365	5.792	8.634	11.649	14.529	16.935	18.543	19.110	3.490	66.87	25.50	1.153064

N. 28	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	470991
	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	538191
	3	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	605391
	4	0.273	1.111	2.550	4.603	7.213	10.196	13.237	15.914	17.769	18.437	2.300	34.19	19.70	672591
	5	0.289	1.169	2.666	4.776	7.428	10.430	13.465	16.121	17.953	18.612	2.456	37.98	20.50	739791
	6	0.304	1.227	2.781	4.949	7.643	10.663	13.693	16.327	18.137	18.787	2.611	41.96	21.30	806991
	7	0.320	1.285	2.897	5.122	7.858	10.897	13.921	16.534	18.322	18.961	2.767	46.12	22.11	874191
	8	0.335	1.343	3.012	5.295	8.073	11.130	14.149	16.741	18.506	19.136	2.922	50.47	22.91	941391
	9	0.351	1.401	3.128	5.468	8.288	11.364	14.377	16.947	18.690	19.311	3.078	55.01	23.71	1.008591
	10	0.366	1.460	3.243	5.640	8.503	11.597	14.604	17.154	18.874	19.486	3.233	59.73	24.52	1.075791
	11	0.382	1.518	3.359	5.813	8.718	11.831	14.832	17.360	19.059	19.650	3.389	64.64	25.32	1.142991
	12	0.398	1.576	3.474	5.986	8.933	12.064	15.060	17.567	19.243	19.835	3.545	69.74	26.13	1.210191
N. 29	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	502748
	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	572348
	3	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	641948
	4	0.280	1.141	2.625	4.748	7.456	10.560	13.730	16.526	18.466	19.164	2.350	35.76	20.25	711548
	5	0.296	1.202	2.745	4.927	7.678	10.800	13.963	16.735	18.651	19.339	2.507	39.69	21.07	781148
	6	0.312	1.262	2.865	5.106	7.900	11.040	14.196	16.944	18.836	19.513	2.664	43.81	21.89	850748
	7	0.329	1.323	2.985	5.285	8.122	11.280	14.428	17.153	19.020	19.688	2.821	48.13	22.71	920348
	8	0.345	1.383	3.105	5.464	8.344	11.520	14.661	17.362	19.205	19.862	2.978	52.64	23.54	989948
	9	0.361	1.444	3.225	5.643	8.566	11.760	14.894	17.571	19.390	20.037	3.135	57.34	24.36	1.059548
	10	0.377	1.504	3.344	5.823	8.788	12.000	15.127	17.780	19.575	20.211	3.292	62.24	25.18	1.129148
	11	0.394	1.565	3.464	6.002	9.010	12.239	15.359	17.989	19.759	20.386	3.449	67.33	26.00	1.198748
	12	0.410	1.625	3.584	6.181	9.232	12.479	15.592	18.198	19.944	20.560	3.605	72.61	26.83	1.268348
N. 30	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	535536
	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	607536
	3	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	679536
	4	0.287	1.172	2.699	4.894	7.699	10.923	14.224	17.137	19.162	19.892	2.400	37.33	20.74	751536
	5	0.304	1.235	2.823	5.079	7.928	11.170	14.461	17.349	19.347	20.066	2.559	41.40	21.58	823536
	6	0.321	1.297	2.948	5.264	8.157	11.416	14.699	17.560	19.532	20.240	2.717	45.67	22.42	895536
	7	0.338	1.360	3.072	5.449	8.386	11.663	14.936	17.772	19.718	20.414	2.876	50.14	23.26	967536
	8	0.355	1.422	3.196	5.634	8.615	11.909	15.173	17.983	19.903	20.588	3.034	54.81	24.09	1.039536
	9	0.372	1.485	3.321	5.819	8.844	12.156	15.411	18.195	20.088	20.762	3.193	59.68	24.93	1.111536
	10	0.388	1.547	3.445	6.005	9.074	12.402	15.648	18.406	20.273	20.936	3.350	64.75	25.77	1.183536
	11	0.405	1.610	3.569	6.190	9.303	12.649	15.885	18.618	20.459	21.110	3.509	70.02	26.61	1.255536
	12	0.422	1.673	3.694	6.375	9.532	12.895	16.123	18.830	20.644	21.284	3.668	75.48	27.44	1.327536

Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich										$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
		9⁰	18⁰	27⁰	36⁰	45⁰	54⁰	63⁰	72⁰	81⁰	90⁰				
R. 31	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	569353
	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	643753
	3	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	718153
	4	0.294	1.200	2.771	5.036	7.941	11.290	14.726	17.764	19.879	20.642	2.440	39.01	21.25	792553
	5	0.312	1.265	2.900	5.227	8.177	11.542	14.967	17.977	20.063	20.814	2.600	43.22	22.11	866953
	6	0.329	1.330	3.028	5.418	8.413	11.794	15.208	18.190	20.247	20.986	2.759	47.65	22.97	941353
	7	0.347	1.395	3.157	5.609	8.648	12.046	15.449	18.402	20.431	21.158	2.919	52.27	23.83	1.015753
	8	0.364	1.460	3.285	5.800	8.884	12.298	15.690	18.615	20.615	21.330	3.078	57.10	24.69	1.090153
	9	0.382	1.525	3.414	5.991	9.119	12.550	15.931	18.828	20.799	21.502	3.238	62.14	25.55	1.164553
	10	0.399	1.590	3.543	6.183	9.355	12.803	16.173	19.041	20.983	21.673	3.397	67.38	26.41	1.238953
	11	0.417	1.655	3.671	6.374	9.590	13.055	16.414	19.253	21.167	21.845	3.557	72.83	27.27	1.313353
	12	0.434	1.720	3.800	6.565	9.826	13.307	16.655	19.466	21.351	22.017	3.717	78.47	28.12	1.387753
R. 32	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	604200
	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	681000
	3	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	757800
	4	0.300	1.229	2.842	5.178	8.183	11.656	15.229	18.392	20.596	21.391	2.480	40.69	21.85	834600
	5	0.318	1.296	2.975	5.375	8.425	11.914	15.474	18.606	20.779	21.561	2.641	45.05	22.72	911400
	6	0.336	1.363	3.108	5.572	8.667	12.172	15.718	18.819	20.962	21.731	2.801	49.63	23.60	988200
	7	0.354	1.430	3.241	5.769	8.909	12.430	15.963	19.033	21.145	21.901	2.962	54.40	24.47	1.065000
	8	0.372	1.497	3.374	5.966	9.151	12.688	16.207	19.246	21.328	22.071	3.122	59.40	25.35	1.141800
	9	0.391	1.565	3.507	6.163	9.393	12.946	16.452	19.460	21.511	22.241	3.283	64.60	26.22	1.218600
	10	0.409	1.632	3.640	6.361	9.636	13.204	16.697	19.674	21.693	22.411	3.443	70.01	27.10	1.295400
	11	0.427	1.699	3.773	6.558	9.878	13.462	16.941	19.887	21.876	22.581	3.604	75.64	27.97	1.372200
	12	0.445	1.766	3.906	6.755	10.120	13.720	17.186	20.101	22.059	22.751	3.765	81.47	28.85	1.449000

Nr. 33	1	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	640078
	2	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	719278
	3	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	798478
	4	0.307	1.257	2.914	5.320	8.425	12.023	15.731	19.019	21.313	22.141	2.510	42.37	22.42	877678
	5	0.326	1.327	3.051	5.523	8.674	12.287	15.979	19.234	21.495	22.309	2.672	46.88	23.31	956878
	6	0.345	1.396	3.188	5.726	8.922	12.550	16.228	19.449	21.676	22.477	2.834	51.61	24.20	1.036078
	7	0.364	1.466	3.325	5.929	9.171	12.814	16.476	19.663	21.858	22.645	2.996	56.54	25.09	1.115278
	8	0.382	1.535	3.463	6.132	9.419	13.077	16.724	19.878	22.039	22.813	3.158	61.70	25.98	1.194478
	9	0.401	1.605	3.600	6.335	9.668	12 341	16.973	20.093	22.221	22.981	3.320	67.06	26.87	1.273678
	10	0.420	1.674	3.737	6.539	9.916	13.604	17.221	20.308	22.402	23.149	3.482	72.65	27.76	1.352878
	11	0.438	1.744	3.874	6.742	10.165	13.868	17.469	20.523	22.584	23.317	3.644	78.45	28.65	1.432078
	12	0.457	1.813	4.012	6.945	10.414	14.132	17.718	20.737	22.766	23.484	3 807	84.47	29.54	1.511278
Nr. 34	1	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	676986
	2	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	758586
	3	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	840186
	4	0.313	1.285	2.985	5.462	8.667	12.389	16.234	19.647	22.030	22.890	2.545	44.05	23.10	921786
	5	0.332	1.357	3.127	5.671	8.922	12.658	16.486	19.863	22.210	23.056	2.708	48.71	24.00	1.003386
	6	0.352	1.429	3 268	5.880	9.177	12.928	16.738	20.078	22.391	23.222	2.871	53.59	24.90	1.084986
	7	0.371	1.500	3.410	6.089	9.432	13.197	16.990	20.294	22.571	23.388	3.034	58.68	25.80	1.166586
	8	0.390	1.572	3.551	6.298	9.687	13.466	17.242	20.509	22.752	23.554	3.197	64.00	26.70	1.248186
	9	0.410	1.644	3.693	6.507	9.942	13.736	17 494	20.725	22.932	23.720	3.360	69.53	27.60	1.329786
	10	0.429	1.716	3.834	6.716	10.197	14.005	17.745	20.941	23.113	23.886	3.523	75.29	28.50	1.411386
	11	0.448	1.787	3.976	6.925	10.452	14.275	17.997	21.156	23.293	24.052	3.686	81.27	29.40	1.492986
	12	0.468	1.859	4.118	7.135	10.708	14.544	18.249	21.372	23.474	24.218	3.850	87.47	30.30	1.574586
Nr. 35	1	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	714924
	2	,	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	798924
	3	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	”	882924
	4	0.320	1.314	3.057	5.603	8.908	12.756	16.736	20.274	22.747	23.640	2.570	45.74	23.73	966924
	5	0.340	1.388	3.203	5.818	9.170	13.031	16.992	20.491	22.926	23.804	2.735	50.54	24.64	1.050924
	6	0.360	1.462	3.349	6.033	9.432	13.306	17.247	20.708	23.105	23.968	2.900	55.57	25.55	1.134924
	7	0.380	1.536	3.495	6.248	9 694	13.581	17.503	20.924	23.284	24.132	3.065	60.82	26.46	1.218924
	8	0.400	1.610	3.641	6.463	9.956	13.856	17.758	21.141	23.464	24.296	3.230	66.30	27.37	1.302924
	9	0.420	1.684	3.787	6.678	10.218	14.131	18.014	21.358	23.643	24.460	3.395	72.00	28.28	1.386924
	10	0.440	1.758	3.933	6.894	10.480	14.407	18.269	21.575	23.822	24.624	3.560	77.93	29.19	1.470924
	11	0.460	1.832	4.079	7.109	10.742	14.682	18.525	21.791	24.001	24.787	3.725	84.09	30.10	1.554924
	12	0.480	1.906	4.225	7.324	11.003	14.957	18.781	22.008	24.181	24.951	3.890	90.47	31.01	1.638924

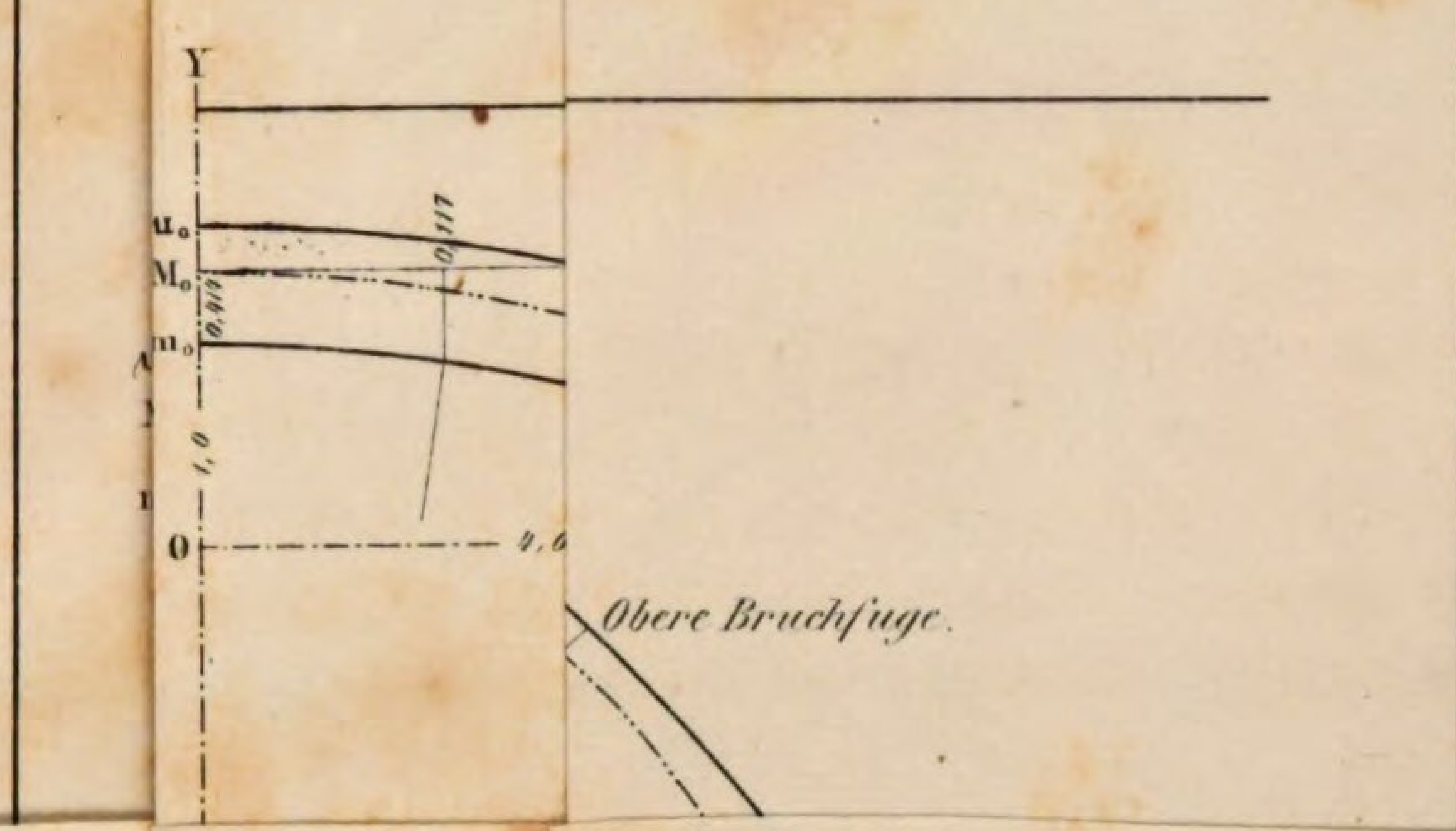
Radius.	h	Ordinaten $Y_0 - Y$ für die Werthe von α gleich 9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°	$Y_0 - y_0$	$\frac{P_0}{10000}$	$\frac{P'}{10000}$	P_v
R. 36	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	753891
	2	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	840291
	3	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	926691
	4	0.326	1.342	3.130	5.750	9.161	13.143	17.269	20.943	23.513	24.442	2.595	47.47	24.43	1.013091
	5	0.347	1.418	3.280	6.970	9.428	13.421	17.525	21.156	23.686	24.598	2.761	52.42	25.35	1.099491
	6	0.367	1.494	3.430	6.190	9.694	13.699	17.780	21.369	23.859	24.755	2.926	57.62	26.27	1.185891
	7	0.388	1.570	3.580	6.410	9.961	13.977	18.036	21.582	24.032	24.911	3.092	63.03	27.19	1.272291
	8	0.408	1.646	3.729	6.630	10.227	14.255	18.291	21.795	24.205	25.067	3.257	68.68	28.11	1.358691
	9	0.429	1.722	3.879	6.850	10.494	14.533	18.547	22.008	24.378	25.224	3.423	74.56	29.03	1.445091
	10	0.449	1.798	4.029	7.070	10.760	14.812	18.802	22.222	24.550	25.380	3.588	80.67	29.95	1.531491
	11	0.470	1.875	4.179	7.290	11.027	15.090	19.058	22.435	24.723	25.536	3.754	87.02	30.87	1.617891
	12	0.491	1.951	4.328	7.510	11.294	15.368	19.314	22.648	24.896	25.693	3.920	93.59	31.78	1.704291
R. 37	1	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	793889
	2	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	882689
	3	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	„	971489
	4	0.333	1.371	3.202	5.896	9.414	13.529	17.802	21.612	24.280	25.245	2.617	49.20	25.12	1.060289
	5	0.354	1.449	3.356	6.121	9.685	13.810	18.058	21.822	24.446	25.394	2.784	54.31	26.04	1.149089
	6	0.375	1.527	3.509	6.346	9.956	14.091	18.313	22.031	24.613	25.543	2.950	59.67	26.97	1.237889
	7	0.396	1.605	3.663	6.571	10.228	14.372	18.569	22.241	24.779	25.691	3.117	65.24	27.89	1.326689
	8	0.417	1.683	3.816	6.796	10.499	14.653	18.824	22.450	24.945	25.840	3.283	71.07	28.82	1.415489
	9	0.438	1.761	3.970	7.021	10.770	14.934	19.080	22.660	25.112	25.989	3.450	77.12	29.74	1.504289
	10	0.460	1.840	4.123	7.245	11.041	15.216	19.336	22.870	25.278	26.138	3.616	83.41	30.67	1.593089
	11	0.481	1.918	4.277	7.470	11.313	15.497	19.591	23.079	25.444	26.286	3.783	89.95	31.59	1.681289
	12	0.502	1.996	4.430	7.695	11.584	15.778	19.847	23.289	25.611	26.435	3.950	96.71	32.52	1.770689

Nr. 38	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	834917
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	926117
	3	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1.017317
	4	0.339	1.399	3.275	6.043	9.667	13.916	18.335	22.281	25.046	26.047	2.634	50.93	25.78	1.108517
	5	0.361	1.479	3.432	6.273	9.943	14.200	18.591	22.487	25.206	26.188	2.802	56.20	26.72	1.199717
	6	0.383	1.559	3.589	6.503	10.219	14.484	18.846	22.693	25.366	26.329	2.970	61.72	27.66	1.290917
	7	0.404	1.640	3.747	6.732	10.495	14.768	19.102	22.899	25.526	26.471	3.138	67.46	28.60	1.382117
	8	0.426	1.720	3.904	6.962	10.771	15.052	19.357	23.105	25.686	26.612	3.306	73.46	29.53	1.473317
	9	0.448	1.800	4.061	7.192	11.047	15.336	19.613	23.311	25.846	26.753	3.475	79.68	30.47	1.564517
	10	0.470	1.880	4.218	7.422	11.323	15.621	19.869	23.517	26.006	26.894	3.643	86.16	31.41	1.655717
	11	0.491	1.961	4.376	7.651	11.599	15.905	20.124	23.723	26.166	27.036	3.811	92.88	32.35	1.746917
	12	0.513	2.041	4.533	7.881	11.875	16.189	20.380	23.929	26.326	27.177	3.980	99.83	33.28	1.838117
Nr. 39	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	876975
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	970575
	3	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1.064175
	4	0.346	1.428	3.347	6.189	9.920	14.302	18.868	22.950	25.813	26.850	2.648	52.66	26.55	1.157775
	5	0.368	1.510	3.508	6.424	10.201	14.589	19.124	23.153	25.967	26.984	2.818	58.09	27.50	1.251375
	6	0.390	1.592	3.669	6.658	10.481	14.876	19.379	23.355	26.120	27.117	2.988	63.77	28.45	1.344975
	7	0.413	1.675	3.830	6.893	10.762	15.163	19.635	23.558	26.274	27.251	3.158	69.68	29.40	1.438575
	8	0.435	1.757	3.991	7.127	11.042	15.450	19.890	23.760	26.427	27.384	3.328	75.85	30.35	1.532175
	9	0.457	1.839	4.152	7.362	11.323	15.737	20.146	23.963	26.581	27.517	3.499	82.25	31.30	1.625775
	10	0 479	1.921	4.313	7.597	11.603	16.025	20.401	24.165	26.734	27.651	3.669	88.91	32.25	1.719375
	11	0.502	2.004	4.474	7.831	11.884	16.312	20.657	24.368	26.888	27.785	3.839	95.81	33.20	1.812975
	12	0.524	2.086	4.635	8.066	12.165	16.599	20.913	24.570	27.041	27.919	4.010	102.95	34.15	1.906575
Nr. 40	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	920064
	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1.016064
	3	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1.112064
	4	0.352	1.456	3.420	6.336	10.172	14.689	19.402	23.620	26.579	27.652	2.660	54.40	27.27	1.208064
	5	0.375	1.540	3.585	6.576	10.458	14.979	19.657	23.819	26.726	27.778	2.832	59.98	28.24	1.304064
	6	0.398	1.624	3.750	6.815	10.743	15.269	19.913	24.018	26.873	27.904	3.004	65.82	29.21	1.400064
	7	0.421	1.709	3.914	7.055	11.029	15.559	20.168	24.216	27.020	28.030	3.176	71.90	30.18	1.496064
	8	0.444	1.793	4.079	7.294	11.314	15.849	20.423	24.415	27.167	28.156	3.348	78.24	31.15	1.592064
	9	0.467	1.877	4.244	7.534	11.600	16.139	20.679	24.614	27.314	28.282	3.520	84.82	32.12	1.688064
	10	0.489	1.961	4.409	7.773	11.885	16.429	20.934	24.813	27.462	28.468	3.692	91.66	33.09	1.784064
	11	0.512	2.046	4.573	8.013	12.171	16.719	21.190	25.011	27.609	28.534	3.864	98.74	34.06	1.880064
	12	0.535	2.130	4.738	8.252	12.456	17.010	21.445	25.210	27.756	28.660	4.037	106.08	35.04	1.976064

Inhalt.

Tafel I.

Fig. 5.



Tellkampf, Hermann

Beiträge zur Gewölbtheorie

Hannover 1855